

ANALIZA 2, KOŁOKWIUM nr **60**, 12.06.2017, godz. 8:15–11:00

Wykład: J. Wróblewski

Zadanie **69.** (10 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x + \sqrt[9]{x}}$.

Zadanie **70.** (20 punktów)

Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leq 64.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq C,$$

gdzie $C = 16$ (za 20 punktów) lub $C = 27$ (za 10 punktów).

Zadanie **71.** (30 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_2^{34} g(x) dx$, gdzie g jest funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^5 + x$.

Zadanie **72.** (40 punktów)

Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Przyjmując, że można beztrudno różniczkować i całkować występujące w rozwiązaniu szeregi wyraz za wyrazem (co wynika z faktów wykraczających poza materiał prezentowany na wykładzie), wyprowadzić wzór na

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

W miarę możliwości nie korzystać ze wzoru na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — wykorzystanie tego wzoru w rozwiązaniu obniży punktację. Jako wniosek z rozwiązania wyprowadzić wzór na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Zadanie **73.** (50 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^8 + x}$.

Zadanie **74.** (100 punktów)

Udowodnić, że suma szeregu

$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} - \frac{1}{29} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} - \dots$,
w którym mianowniki to kolejne liczby nieparzyste, a na przemian występują po dwa wyrazy dodatnie i dwa ujemne, jest równa całce $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$.