

KOŁOKWIUM nr 6, 11.04.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 10.** (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

$$1 = A \cdot (x+1) + B \cdot (x-1),$$

$$1 = Ax + A + Bx - B,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+B \\ 1 &= A-B \end{cases}$$

Bez trudu otrzymujemy $A = 1/2$ i $B = -1/2$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} &= \int_3^{\infty} \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_3^{\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \Bigg|_{x=3}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \right) \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 4}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{-\ln 2 + 2 \cdot \ln 2}{2} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 2}{2}$.

Uwaga: Całki

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_3^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x-1|}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{2}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie porządzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane (a więc ocena częściowa musi być **mniejsza** od 50%, czyli od 5 punktów).

Zadanie 11. (10 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{28^n \cdot (n!)^3}.$$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy z kryterium d'Alemberta.

W tym celu przekształcimy iloraz kolejnych wyrazów szeregu, przejdziemy z nim do granicy przy $n \rightarrow \infty$, a następnie porównamy otrzymaną granicę z liczbą 1:

$$\frac{(3n+3)!}{28^{n+1} \cdot ((n+1)!)^3} \cdot \frac{28^n \cdot (n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{28 \cdot (n+1)^3} \rightarrow \frac{27}{28} < 1,$$

skąd wynika, że dany w treści zadania szereg jest zbieżny.