

KOŁOKWIUM nr 7, 19.04.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 12.** (10 punktów)Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}$.*Rozwiązanie:*

Oznaczmy $a_n = \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}$ i zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}} = b_n.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży b_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy ponownie kryterium Cauchy'ego, tym razem do **ciągu** (b_n) . Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}}} = \frac{(n+1)^n}{2 \cdot n^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{2} > 1.$$

Z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) wynika więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1,$$

skąd na podstawie kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.

Zadanie 13. (10 punktów)

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)}$.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n}\right) \cdot \left(4 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{n}\right)} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)} \geq \frac{(4n+1) \cdot (4n+5)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{4n-3}{3n-2} \geq \frac{4n+5}{3n+7},$$

$$(4n-3) \cdot (3n+7) \geq (4n+5) \cdot (3n-2),$$

$$12n^2 + 28n - 9n - 21 \geq 12n^2 - 8n + 15n - 10,$$

$$12n^2 + 19n - 21 \geq 12n^2 + 7n - 10,$$

$$12n \geq 11,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.