

KOŁOKWIUM nr 81, 7.03.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 81. (20 punktów)**

Skonstruować funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(4) = 4, \quad f(36) = 36 \quad \text{oraz} \quad f(x) = (f'(x))^2 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie:

Zajmijmy się najpierw warunkiem

$$f(x) = (f'(x))^2 \tag{1}$$

i spróbujmy znaleźć funkcje, być może określone na przedziale mniejszym niż $\mathbb{R}$, które go spełniają. Ponieważ prawa strona równania (1) jest nieujemna, funkcje takie nie mogą przyjmować wartości ujemnych.

Przed wszystkim zauważmy, że funkcja stała równa 0 spełnia warunek (1).

Jeżeli funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, to możemy przepisać warunek (1) w postaci

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \pm 1. \tag{2}$$

Całkując stronami równanie (2) otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{f(x)}} &= \pm \int dx, \\ 2 \cdot \sqrt{f(x)} &= \pm (x + C), \\ f(x) &= \frac{(x + C)^2}{4}. \end{aligned} \tag{3}$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcja f określona wzorem (3) spełnia warunek (1) pomimo tego, że w wyprowadzeniu wzoru (3) zakładaliśmy dodatniość funkcji f , co tutaj nie jest prawdą dla $x = -C$.

Ideę obserwacji kluczowej dla przeprowadzanej konstrukcji najlepiej zobrazować geometrycznie. Otóż wykres funkcji f zdefiniowanej wzorem (3) jest parabola o wierzchołku znajdującym się na osi OX , a dokładniej w punkcie $(-C, 0)$. W tymże punkcie zachodzą równości $f(-C) = f'(-C) = 0$, takie same jak dla funkcji stałej równej 0. Możemy więc rozciąć parabolę w wierzchołku, rozsunąć na boki jej ramiona i połączyć je odcinkiem leżącym na osi OX . W języku funkcji sprowadza się to do przyjęcia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+C)^2}{4} & \text{dla } x \in (-\infty, -C) \\ 0 & \text{dla } x \in [-C, -D] \\ \frac{(x+D)^2}{4} & \text{dla } x \in (-D, +\infty) \end{cases} \tag{4}$$

Zauważmy, że wartości tak określonej funkcji f oraz jej pochodne jednostronne w punktach $-C$ i $-D$ są równe 0, skąd wynika, że gdy tylko $-C \leq -D$, wzór (4) określa funkcję różniczkowalną na całej prostej spełniającą równanie (1).

W celu doboru odpowiednich stałych C i D rozwiązujemy równania

$$\frac{(4+C)^2}{4} = 4, \quad 4+C < 0$$

oraz

$$\frac{(36+D)^2}{4} = 36, \quad 36+D > 0,$$

które prowadzą do

$$C = -8 \quad \text{oraz} \quad D = -24.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-8)^2}{4} & \text{dla } x \in (-\infty, 8) \\ 0 & \text{dla } x \in [8, 24] \\ \frac{(x-24)^2}{4} & \text{dla } x \in (24, +\infty) \end{cases}$$

Punktacja:

20 punktów - rozwiązanie poprawne (2 prace).

4 punkty - znaleziona funkcja $\frac{x^2}{4} + Cx + C^2$ (2 prace).

2 punkty - znaleziona funkcja $\frac{x^2}{4}$ (2 prace).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (2 prace).

Liczba osób piszących kolokwium: **8**.

Suma uzyskanych punktów: **52**.

Mnożnik kolokwium: **19** (zaokrąglone $1000/52$).