

KOŁOKWIUM nr 83, 21.03.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 83. (20 punktów)**

Udowodnić nierówność

$$\int_1^3 \sqrt[3]{7x^2+1} dx > 6.$$

*Rozwiązanie:**Sposób I:*Pochodna funkcji podcałkowej $f(x) = \sqrt[3]{7x^2+1}$ dana jest wzorem

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (7x^2+1)^{-2/3} \cdot 14x = \frac{14}{3} \cdot x \cdot (7x^2+1)^{-2/3},$$

a pochodna drugiego rzędu jest równa

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{14}{3} \cdot (7x^2+1)^{-2/3} + \frac{14}{3} \cdot x \cdot \frac{-2}{3} \cdot (7x^2+1)^{-5/3} \cdot 14x = \\ &= \frac{14}{3} \cdot (7x^2+1)^{-2/3} - \frac{392}{9} \cdot x^2 \cdot (7x^2+1)^{-5/3} = \\ &= \frac{14}{3} \cdot (7x^2+1)^{-5/3} \cdot (7x^2+1) - \frac{392}{9} \cdot x^2 \cdot (7x^2+1)^{-5/3} = \\ &= \left(\frac{14}{3} \cdot (7x^2+1) - \frac{392}{9} \cdot x^2 \right) \cdot (7x^2+1)^{-5/3} = \\ &= (3 \cdot (7x^2+1) - 28 \cdot x^2) \cdot \frac{14}{9} \cdot (7x^2+1)^{-5/3} = (3 - 7 \cdot x^2) \cdot \frac{14}{9} \cdot (7x^2+1)^{-5/3}, \end{aligned}$$

co jest ujemne dla $x \geq 1$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $[1, +\infty)$, a więc jej wykres leży nad cięciwą łączącą punkty wykresu odpowiadające $x=1$ i $x=3$. Ponieważ cięciwa ta ma równanie $y=x+1$, otrzymujemy nierówność

$$\sqrt[3]{7x^2+1} > x+1 \quad (1)$$

spełnioną dla $x \in (1, 3)$. Wobec tego

$$\int_1^3 \sqrt[3]{7x^2+1} dx > \int_1^3 x+1 dx = \frac{x^2}{2} + x \Big|_{x=1}^3 = \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} - 1 = 6.$$

Uwaga:

Wartość całki $\int_1^3 x+1 dx$ można podać bez całkowania korzystając z następującej reguły: Całka oznaczona z funkcji liniowej jest iloczynem długości przedziału całkowania przez wartość funkcji podcałkowej w środku przedziału całkowania.

Sposób II:

Postępujemy jak w Sposobie I, przy czym nierówność (1) dowodzimy bezpośrednio przekształcając ją do postaci równoważnych:

$$\begin{aligned} 7x^2+1 &> (x+1)^3, \\ 7x^2+1 &> x^3+3x^2+3x+1, \end{aligned}$$

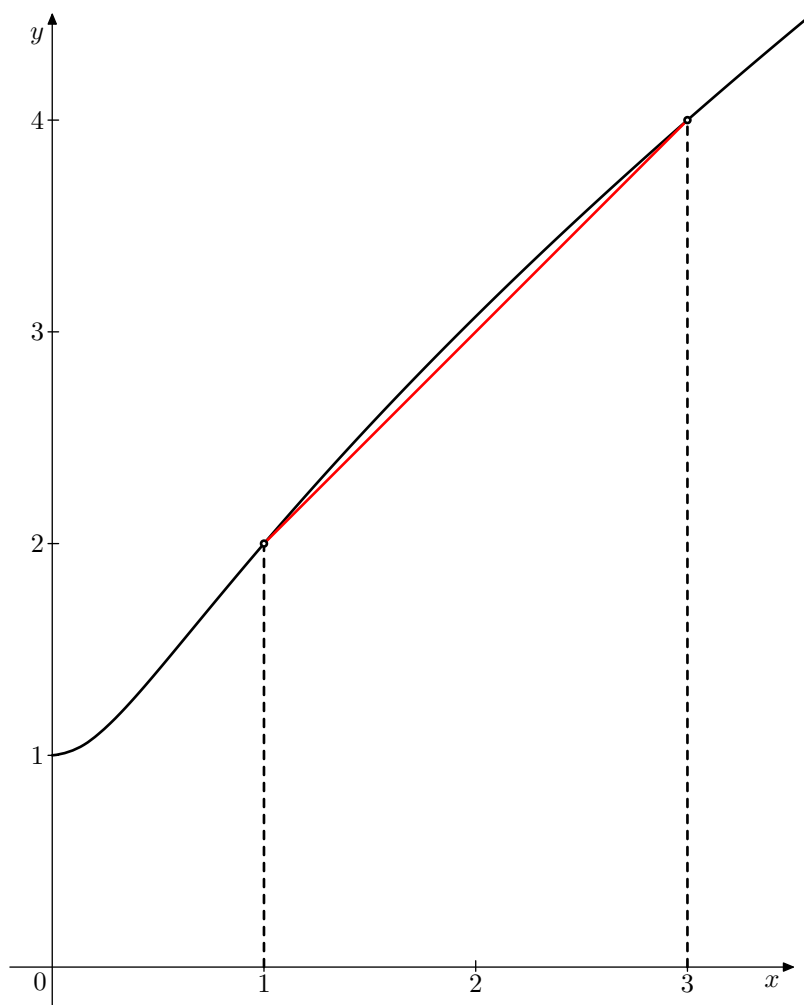
$$0 > x^3 - 4x^2 + 3x,$$

$$0 > x \cdot (x-1) \cdot (x-3),$$

co jest prawdziwe dla $x \in (1, 3)$.

Uwaga:

Wartość szacowanej całki jest mniejsza od 6,1. Oznacza to, że w rozwiązaniu nie możemy sobie pozwolić na zbyt grube oszacowania. Na rysunku 1 przedstawiony jest wykres funkcji f wraz z jej cięciwą użytą do oszacowania całki.



rys. 1

Punktacja:

20 punktów - rozwiązanie poprawne (4 prace).

16 punktów - naprawialny błąd rachunkowy, poza tym OK (1 praca).

8 punktów - oszacowanie przez całkę $\int_1^3 \sqrt[3]{7x^2} dx = \frac{9}{5} \cdot \sqrt[3]{63} - \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{7}$ i nieudana próba szacowania otrzymanej liczby - mimo wszystko większej od 6 (1 praca).

4 punkty - brak dowodu nierówności $\sqrt[3]{7x^2+1} > x+1$, ale nierówność jest sformułowana i wykorzystana do oszacowania całki (1 praca).

Liczba osób piszących kolokwium: **7**.

Suma uzyskanych punktów: **108**.

Mnożnik kolokwium: **9** (zaokrąglone $1000/108$).