

KOŁOKWIUM nr 84, 28.03.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 84. (20 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}} + \sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}} dx.$$

*Rozwiązanie:*Niech $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}.$$

Zauważmy, że $f(1) = 1$ oraz $f(2) = 2$, a ponadto przekształcanie równania $y = f(x)$ prowadzi kolejno do

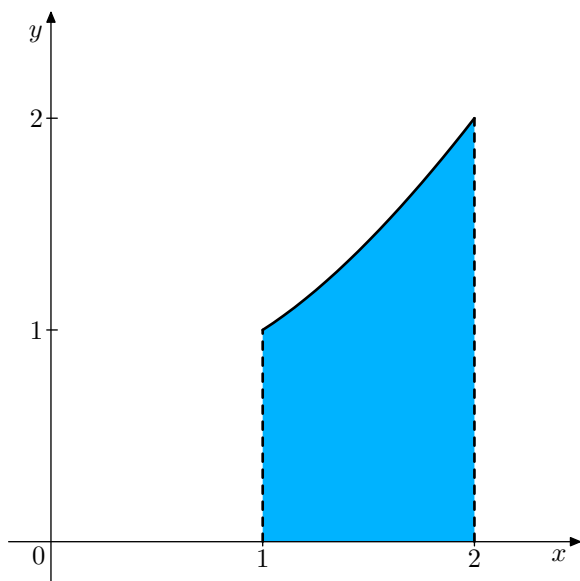
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}}, & y^2 &= \frac{3x^3+4}{7}, & 7y^2 &= 3x^3+4, \\ 7y^2-4 &= 3x^3, & \frac{7y^2-4}{3} &= x^3, & \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}} &= x. \end{aligned}$$

Oznacza to, że dana w zadaniu całka ma postać

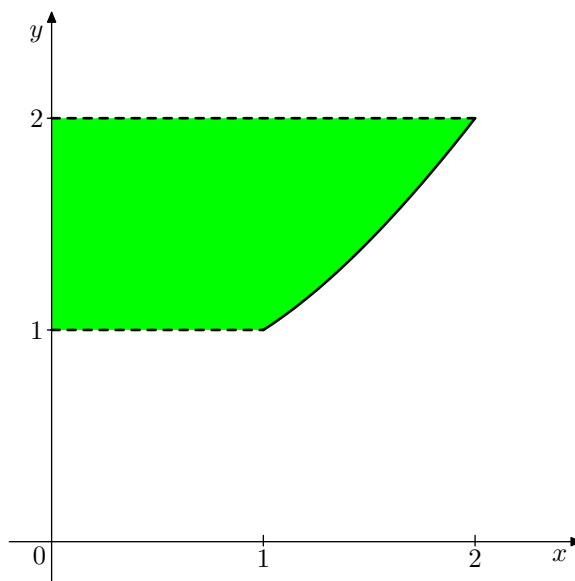
$$\int_1^2 f(x) + f^{-1}(x) dx,$$

gdzie $f^{-1}: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f określoną wzorem

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}}.$$



rys. 1



rys. 2

Całka

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}} dx$$

jest polem figury

$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq f(x)\} = \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3x^3+4}{7}} \right\}$$

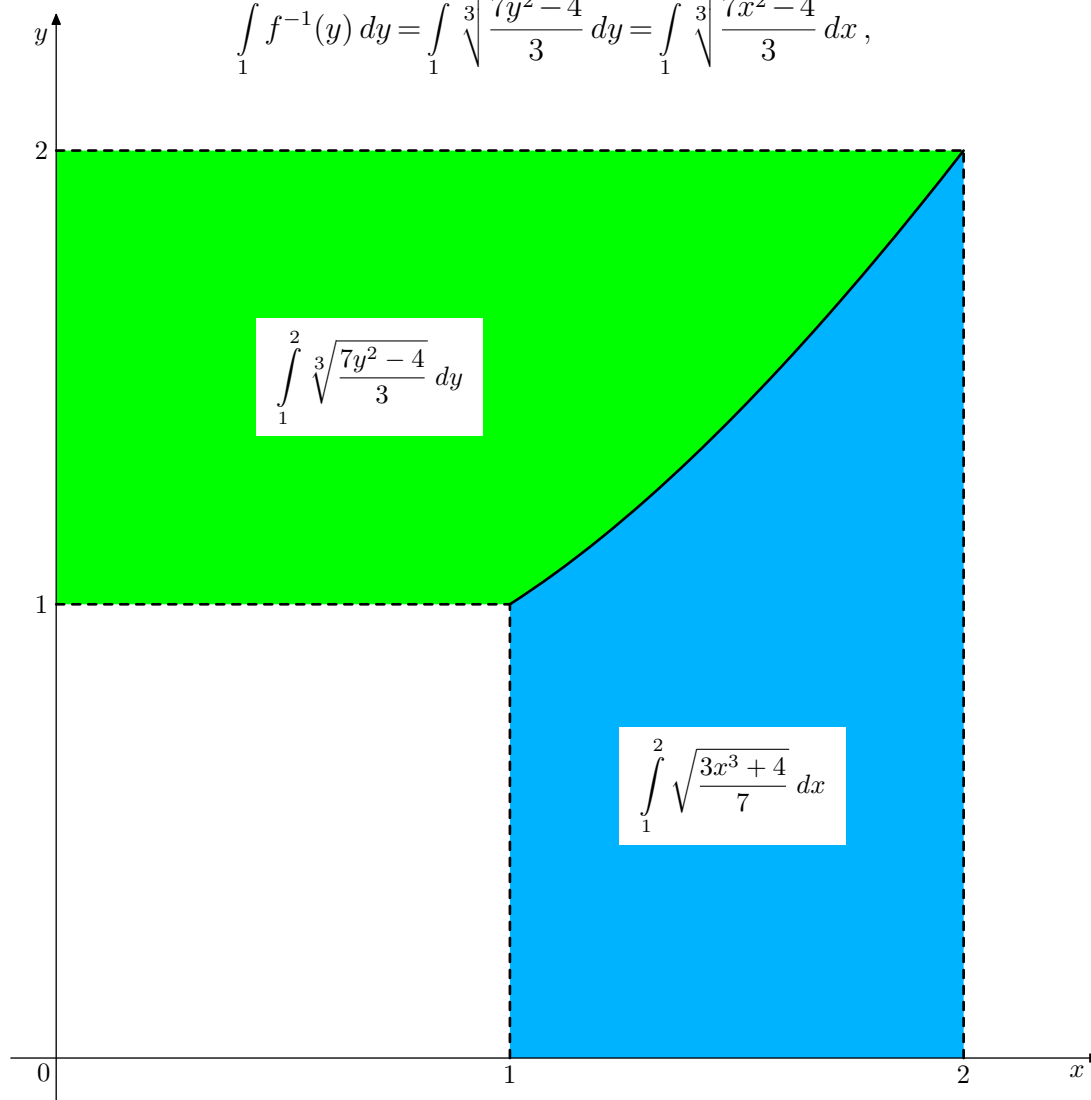
zamalowanej na rysunku 1 kolorem niebieskim.

Z kolei na rysunku 2 kolorem zielonym zamalowana jest figura

$$\{(x, y) : 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq f^{-1}(y)\} = \left\{ (x, y) : 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}} \right\},$$

której pole jest równe

$$\int_1^2 f^{-1}(y) dy = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{7y^2-4}{3}} dy = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{7x^2-4}{3}} dx,$$



rys. 3

Dana w zadaniu całka ma więc wartość równą polu figury zamalowanej na rysunku 3. Ponieważ zamalowana figura jest sumą trzech kwadratów jednostkowych, jej pole jest równe 3.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 3.

Punktacja:

20 punktów - rozwiązanie poprawne (3 prace).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (3 prace).

Liczba osób piszących kolokwium: **6**.

Suma uzyskanych punktów: **60**.

Mnożnik kolokwium: **17** (zaokrąglone $1000/60$).