

KOŁOKWIUM nr 85, 4.04.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 85. (20 punktów)**

Udowodnić nierówność

$$\int_0^2 \sqrt{4x^3 + 3x^2 + 2x + 16} \, dx > \frac{32}{3}.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$f(x) = \sqrt{4x^3 + 3x^2 + 2x + 16}$$

oznacza funkcję podcałkową. Zauważmy, że $f(0) = 4$, $f(1) = 5$ oraz $f(2) = 8$. Zauważmy, że funkcja $g(x) = x^2 + 4$ osiąga w punktach 0, 1 i 2 te same wartości, co f . Udowodnimy, że dla każdego $x \in [0, 2]$ zachodzi nierówność $f(x) \geq g(x)$, przy czym równość ma miejsce tylko dla $x = 0, 1, 2$.

Przekształcamy dowodzoną nierówność do postaci równoważnych, przy czym równość musi mieć miejsce dla $x \in [0, 2]$.

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^3 + 3x^2 + 2x + 16} &\geq x^2 + 4, \\ 4x^3 + 3x^2 + 2x + 16 &\geq x^4 + 8x^2 + 16, \\ 0 &\geq x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x, \\ 0 &\geq x \cdot (x^3 - 4x^2 + 5x - 2), \\ 0 &\geq x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 2), \\ 0 &\geq x \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 2), \end{aligned} \tag{*}$$

co jest prawdą dla każdego $x \in [0, 2]$.

(*) Zauważamy, że 1 jest pierwiastkiem wielomianu w nawiasie.

Wobec tego możemy dokończyć rozwiązanie zadania:

$$\int_0^2 \sqrt{4x^3 + 3x^2 + 2x + 16} \, dx > \int_0^2 x^2 + 4 \, dx = \frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{x=0}^2 = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}.$$

Uwagi:

Trzeba wyraźnie podkreślić, że próba szacowania funkcji przez funkcję liniową o wartościach zgodnych na końcach przedziału (czyli rozważanie cięciwy) jest na ogół dobrym pomysłem — co prawda takie szacowanie może być za grube, ale udaje się zawsze, gdy funkcja nie zmienia swojej wypukłości na rozważanym przedziale (a jak zmienia, to też jeszcze ma szansę się udać). Z kolei wpasowanie funkcji kwadratowej do wartości funkcji podcałkowej na końcach i w środku przedziału całkowania daje nadzieję na dużo lepsze przybliżenie niż w przypadku funkcji liniowej. Jednak w przypadku punktu x_0 leżącego wewnątrz przedziału całkowania, równość $f(x_0) = g(x_0)$ na ogół oznacza, że różnica $f(x) - g(x)$ zmienia znak w punkcie x_0 i żadne z oszacowań $f(x) > g(x)$ ani $f(x) < g(x)$ nie jest prawdziwe jednocześnie po obu stronach punktu x_0 . W tym zadaniu funkcja

podcałkowa została tak dobrana, aby mimo wszystko takie szacowanie się udało, tzn. aby różnica $f(x) - g(x)$ nie zmieniała znaku w punkcie 1.

Wartość szacowanej całki jest w przybliżeniu równa 10,69266 przy wymaganym oszacowaniu 10,6666... Oznacza to, że w rozwiązaniu nie możemy sobie pozwolić na zbyt grube oszacowania. Na rysunku 1 przedstawiony jest wykres funkcji f (czarny) wraz z wykresem funkcji g (czerwony) użytej do oszacowania całki.

Punktacja:

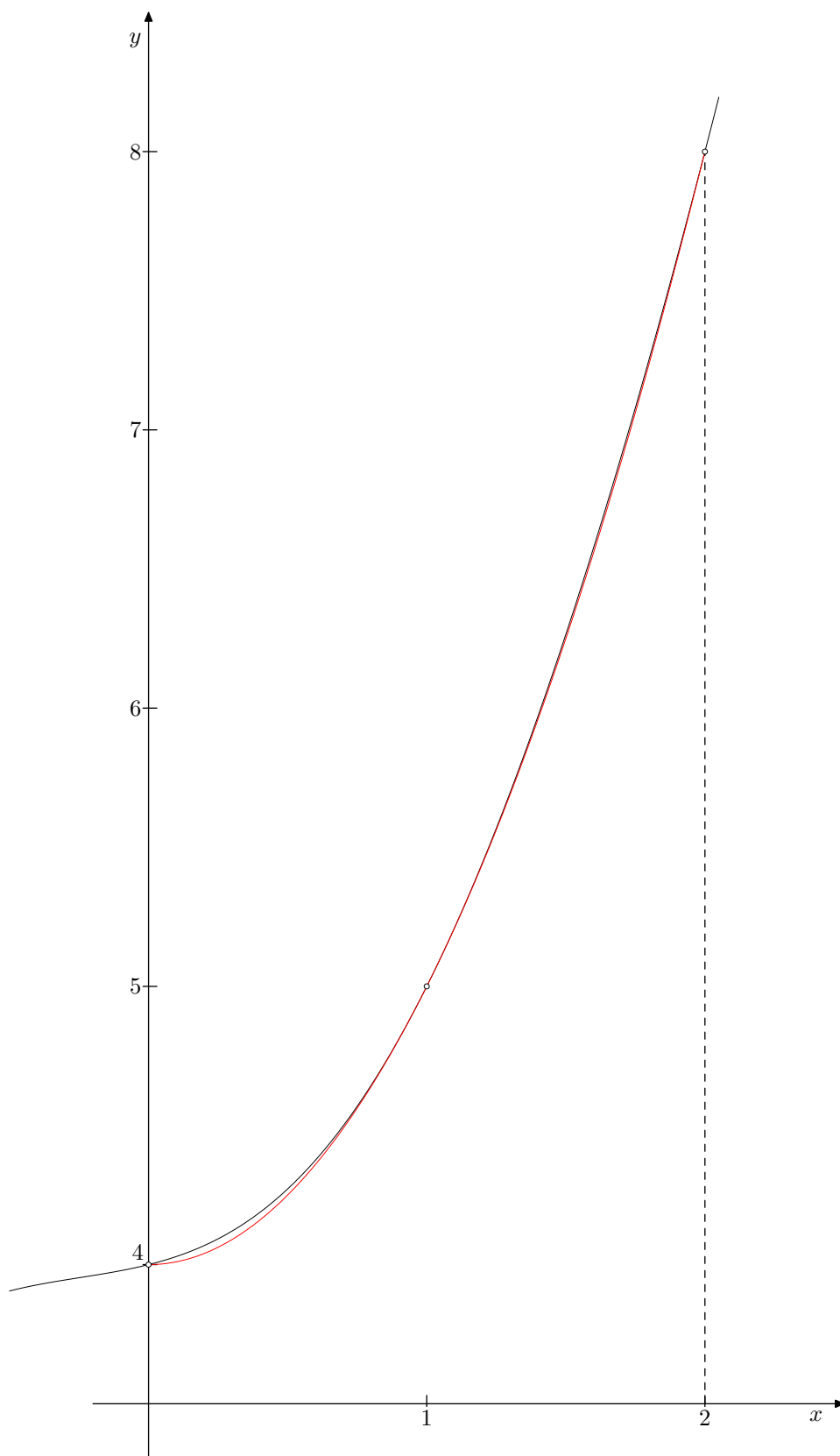
20 punktów - rozwiązanie poprawne (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (6 prac).

Liczba osób piszących kolokwium: **7**.

Suma uzyskanych punktów: **20**.

Mnożnik kolokwium: **50** (1000/20).



rys. 1