

KOŁOKWIUM nr 86, 11.04.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 86. (20 punktów)**

Udowodnić poniższe twierdzenie dla odpowiednio wybranej liczby rzeczywistej k :

Dla dowolnego malejącego ciągu (a_n) zbieżnego do 0, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy

i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n$.

Rozwiązanie:

Podzielmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ na bloki wyrazów, za miejsca podziału wybierając wyrazy o indeksach będących sześciannymi liczb całkowitych. Otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^3+1}^{(n+1)^3} a_i,$$

a przy tym zachodzą nierówności

$$\sum_{i=n^3+1}^{(n+1)^3} a_i \leq ((n+1)^3 - n^3) a_{n^3} = (3n^2 + 3n + 1) a_{n^3}$$

oraz

$$\sum_{i=n^3+1}^{(n+1)^3} a_i \geq ((n+1)^3 - n^3) a_{(n+1)^3} = (3n^2 + 3n + 1) a_{(n+1)^3}.$$

W konsekwencji

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^3+1}^{(n+1)^3} a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} (3n^2 + 3n + 1) a_{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (3n^2 + 3n^2 + n^2) a_{n^3} = 7 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$$

oraz

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^3+1}^{(n+1)^3} a_i &\geq \sum_{n=1}^{\infty} (3n^2 + 3n + 1) a_{(n+1)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (3n^2 - 3n + 1) a_{n^3} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 + 2n^2 - 3n + 1) a_{n^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 + (n-1) \cdot (2n-1)) a_{n^3} \geq \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_{n^3}. \end{aligned}$$

Powyższe nierówności są prawdziwe także w przypadku, gdy występujące w nich sumy szeregów mają wartość $+\infty$.

Na koniec zauważmy, że

$$a_1 + 7 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3} \leq 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$$

oraz

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}.$$

Udowodniliśmy więc oszacowania

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3},$$

z których wynika teza zadania dla $k = 2$.

Uwaga:

Wychodząc od równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^3}^{(n+1)^3-1} a_i$$

i przeprowadzając identyczne oszacowania jak w podanym wyżej rozwiązaniu możemy otrzymać nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 7 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}.$$

Punktacja:

20 punktów - rozwiązanie poprawne (1 praca).

8 punktów - poprawne oszacowanie w jedną stronę (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (5 prac).

Liczba osób piszących kolokwium: **7**.

Suma uzyskanych punktów: **28**.

Mnożnik kolokwium: **36** (zaokrąglone $1000/28$).