

KOŁOKWIUM nr 87, 19.04.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 87. (20 punktów)**

Wiedząc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występują dwa wyrazy dodatnie i jeden ujemny:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{10} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{12} + \dots$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co trzecią sumę częściową. Otrzymujemy

$$S_{3n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1}.$$

Skoro wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2.$$

Ponadto oznaczając $f(x) = 1/(2x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^2 f(x) dx = \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{2x} = \left. \frac{\ln |x|}{2} \right|_{x=1}^2 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1} \right) = \ln 2 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{3 \cdot \ln 2}{2}.$$

Odpowiedź:

Suma danego szeregu jest równa $\frac{3 \cdot \ln 2}{2}$.

Sposób II (na podstawie pracy pana Mateusza Skórskiego):

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co trzecią sumę częściową. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i-2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i-2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{2i} = \\ &= \sum_{i=1}^{4n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}, \end{aligned}$$

co przy $n \rightarrow \infty$ dąży do $\frac{3}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \frac{3 \cdot \ln 2}{2}$.

Odpowiedź:

Suma danego szeregu jest równa $\frac{3 \cdot \ln 2}{2}$.

Uwaga:

Należy podkreślić, że przy oznaczeniu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = A,$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1} = B$$

oraz przez S sumy permutacji szeregu anharmonicznego podanej w treści zadania, sposób I daje $S = A + B$, a sposób II daje $S = 3A/2$.

Połączenie obydwu sposobów prowadzi więc do zależności $A = 2B$, co pozwala wyliczyć sumę szeregu anharmonicznego na podstawie znajomości granicy B , a więc w oparciu o definicję całki Riemanna, bez odwoływania się do szeregu potęgowego funkcji logarytmicznej.

Punktacja:

20 punktów - rozwiązanie poprawne (1 praca).

8 punktów - poprawna metoda (sposób I), drobne pomyłki w granicach sumowania, brak wyliczonej granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1}$ (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (4 prace).

Liczba osób piszących kolokwium: **6**.

Suma uzyskanych punktów: **28**.

Mnożnik kolokwium: **36** (zaokrąglone 1000/28).