

KOŁOKWIUM nr 88, 25.04.2017, godz. 12:15–13:20**Zadanie 88. (10 punktów)**

Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Obliczyć $f^{(2017)}(0)$.*Rozwiązanie:*Ponieważ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ mamy

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Zauważmy ponadto, że równość

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

jest spełniona także dla $x = 0$.Wobec tego f jest sumą powyższego szeregu potęgowego zbieżnego na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ szereg potęgowy można różniczkować wyraz za wyrazem wewnątrz jego przedziału zbieżności, dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f^{(2017)}(x) = \sum_{n=2017}^{\infty} \frac{\frac{n!}{(n-2017)!} \cdot x^{n-2017}}{(n+1)!}.$$

W szczególności składnik powyższej sumy odpowiadający $n = 2017$ daje szukaną wartość pochodnej:

$$f^{(2017)}(0) = \frac{2017!}{2018!} = \frac{1}{2018}.$$

Punktacja:**10 punktów** - rozwiązanie poprawne (1 praca).**0 punktów** - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (4 prace).

Zadanie 89. (20 punktów)

Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4},$$

obliczyć

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx.$$

*Rozwiązanie:*Ponieważ dla każdego $x \in [-1, 1)$ zachodzi równość

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

dla każdej liczby $x \in [-1, 1) \setminus \{0\}$ mamy

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Całkując powyższy szereg potęgowy wyraz za wyrazem otrzymujemy szereg

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

zbieżny w przedziale $[-1, 1]$. Niech $F(x)$ będzie jego sumą — jest to funkcja ciągła w przedziale $[-1, 1]$ i różniczkowalna w $(-1, 1)$. Ponadto dla $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ mamy

$$F'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Zatem

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = F(x) \Big|_{x=0}^1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(1) - F(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 0 = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Punktacja:**20 punktów** - rozwiązanie poprawne (1 praca).**0 punktów** - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (4 prace).Liczba osób piszących kolokwium: **5**.Suma uzyskanych punktów: **30**.Mnożnik kolokwium: **50** (1500/30).