

KOŁOKWIUM nr 89, 9.05.2017, godz. 12:15–13:25**Zadanie 90. (20 punktów)**

Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^7$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie:

Przykładem o własnościach sformułowanych w treści zadania jest ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem

$$a_{k(m-1)+r} = \frac{b_r}{\sqrt[7]{m}} \quad \text{dla} \quad m \in \mathbb{N}, \quad r = 1, 2, 3, \dots, k,$$

gdzie liczby $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ spełniają warunki

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \dots + b_k^3 = b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + \dots + b_k^5 = 0 \quad (\diamond)$$

oraz

$$b_1^7 + b_2^7 + b_3^7 + \dots + b_k^7 \neq 0. \quad (\heartsuit)$$

Pozostaje więc skonstruować taki układ liczb $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$.

Konstrukcja:

Założmy, że układ liczb $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ składa się z x jedynek, y dwójek, z trójek i t czwórek, przy czym dopuszczamy ujemne wartości x, y, z i t oznaczające odpowiednio $-x$ liczb -1 , $-y$ liczb -2 , $-z$ liczb -3 , $-t$ liczb -4 . Wówczas równości $(\diamond)$ przyjmują postać

$$x + 2y + 3z + 4t = x + 8y + 27z + 64t = x + 32y + 243z + 1024t = 0,$$

skąd otrzymujemy $6y + 24z + 60t = 0$ oraz $30y + 240z + 1020t = 0$, co po uproszczeniu daje

$$\begin{cases} y + 4z + 10t = 0, \\ y + 8z + 34t = 0. \end{cases}$$

Odjęcie powyższych równości stronami daje $4z + 24t = 0$, skąd $z = -6t$. Wobec tego

$$y = -4z - 10t = 24t - 10t = 14t$$

oraz

$$x = -2y - 3z - 4t = -28t + 18t - 4t = -14t.$$

Przyjmując $t = 1$ otrzymujemy $x = -14$, $y = 14$ i $z = -6$.

Pozostaje zauważyć, że warunek $(\heartsuit)$ odpowiada warunkowi

$$x + 2^7y + 3^7z + 4^7t \neq 0,$$

czyli

$$-14 + 2^7 \cdot 14 - 3^7 \cdot 6 + 4^7 \neq 0,$$

co jest spełnione, ponieważ

$$2^7 \cdot 14 + 4^7 > 4^7 = 2^{14} = 2^{10} \cdot 2^4 > 16\,000$$

oraz

$$3^7 \cdot 6 + 14 < 3^5 \cdot 54 + 14 = 243 \cdot 54 + 14 < 250 \cdot 60 + 14 = 15\,014 < 16\,000.$$

Dla porządku odnotujmy, że $k = 35$ oraz

$$\begin{cases} b_i = -1 & \text{dla } i = 1, 2, \dots, 14, \\ b_i = 2 & \text{dla } i = 15, 16, \dots, 28, \\ b_i = -3 & \text{dla } i = 29, 30, \dots, 34, \\ b_{35} = 4. \end{cases}$$

Punktacja:

9 punktów - dobra idea, ale za mało różnych liczb wśród b_i , aby mogło się udać (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (5 prac).

Zadanie 91. (40 punktów)

Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^3 - n) \cdot 2^n}$.

Rozwiązanie:

Najpierw obliczymy sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 - n}.$$

W tym celu rozłożymy wyrażenie $1/(n^3 - n)$ na ułamki proste, a następnie skorzystamy ze wzoru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad \text{dla } x \in [-1, 1).$$

Rozkładu na ułamki proste dokonujemy następująco:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3 - n} &= \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1}, \\ 1 &= A \cdot n \cdot (n+1) + B \cdot (n-1) \cdot (n+1) + C \cdot (n-1) \cdot n, \\ \text{dla } n=1: \quad 1 &= 2A, \quad A = 1/2, \\ \text{dla } n=0: \quad 1 &= -B, \quad B = -1, \\ \text{dla } n=-1: \quad 1 &= 2C, \quad C = 1/2. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{1}{n^3 - n} = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1/2}{n+1}.$$

Wobec tego dla $x \in [-1, 1) \setminus \{0\}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 - n} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2x} \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \\ &= \frac{x}{2} \cdot (-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x) - x) + \frac{1}{2x} \cdot \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Sumę danego w zadaniu szeregu liczbowego otrzymamy wstawiając do ostatniego wzoru $x = 1/2$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} \cdot (-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x) - x) + \frac{1}{2x} \cdot \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) &= \\ = \frac{1}{4} \cdot (-\ln(1/2)) - \left(-\ln(1/2) - \frac{1}{2} \right) + 1 \cdot \left(-\ln(1/2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) &= \\ = \frac{\ln 2}{4} - \ln 2 + \frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $\frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{8}$.

Punktacja:

4 punkty - pomysł rozważania szeregu potęgowego, niestety wykonane manipulacje na szeregach potęgowych do niczego nie prowadzą (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (5 prac).

Liczba osób piszących kolokwium: **5**.

Suma uzyskanych punktów: **13**.

Mnożnik kolokwium: **50** (maksymalny).