

KOŁOKWIUM nr 8, 25.04.2017, godz. 12:15–13:20**Zadanie 14.** (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{(k/n)^3}{5(k/n)^4 + 1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \frac{x^3}{5x^4 + 1}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{5x^4 + 1} dx = \frac{1}{20} \cdot \int_0^2 \frac{20x^3}{5x^4 + 1} dx = \\ &= \frac{\ln(5x^4 + 1)}{20} \Big|_{x=0}^2 = \frac{\ln 81 - \ln 1}{20} = \frac{4 \ln 3}{20} = \frac{\ln 3}{5}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{\ln 3}{5}.$$

Zadanie 15. (10 punktów)

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 7, a jego pierwszy wyraz jest równy 2.

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (5^{a_n} - 5^{a_{n+1}})$ jest zbieżny i wyznaczyć jego sumę.

Rozwiązanie:

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ciąg jego wyrazów (a_n) jest zbieżny do zera, a w konsekwencji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 5^{a_n} = 5^0 = 1.$$

Zauważmy, że sumy częściowe szeregu danego w tezie zadania dają się zapisać następującym wzorem:

$$S_N = \sum_{n=1}^N (5^{a_n} - 5^{a_{n+1}}) = 5^{a_1} - 5^{a_{N+1}} = 5^2 - 5^{a_{N+1}} = 25 - 5^{a_{N+1}}.$$

Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (5^{a_n} - 5^{a_{n+1}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (5^{a_n} - 5^{a_{n+1}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (25 - 5^{a_{N+1}}) = 25 - 1 = 24.$$

Odpowiedź: Szereg dany w tezie zadania ma sumę 24.

Uwaga: Informacja o sumie szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbędna – powodem jej umieszczenia są względy pozamatematyczne.

Zadanie 16. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_2^{\infty} \frac{x}{x^4-1} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

$$x = A \cdot (x+1) \cdot (x^2+1) + B \cdot (x-1) \cdot (x^2+1) + (Cx+D) \cdot (x^2-1),$$

$$x = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+B+C \\ 0 &= A-B+D \\ 1 &= A+B-C \\ 0 &= A-B-D \end{cases}$$

Konfrontacja równań drugiego i czwartego daje $D=0$, natomiast odjęcie stronami równań pierwszego i trzeciego prowadzi do $C=-1/2$. Uwzględnienie tych wartości pozostawia równania

$$\begin{cases} 1/2 &= A+B \\ 0 &= A-B \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $A=B=1/4$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{x}{x^4-1} dx &= \int_2^{\infty} \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1} - \frac{x/2}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \cdot \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \Bigg|_{x=2}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \right) \right) - \frac{\ln 1}{4} - \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 5}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{4}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5 - \ln 3}{4}$.

Uwaga: Całki

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x+1} dx, \quad \int_2^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |x-1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |x+1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln (x^2+1)}{4}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie porządzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane (a więc ocena częściowa musi być **mniejsza** od 50%, czyli od 5 punktów).