

KOŁOKWIUM nr 90, 6.06.2017, godz. 12:15–13:45**Zadanie 92. (20 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n-1) \cdot n \cdot 2^n}.$$

*Rozwiązanie:**Sposób I*

Rozkładając wyrażenie

$$\frac{n+1}{(n-1) \cdot n}$$

na ułamki proste otrzymujemy kolejno:

$$\frac{n+1}{(n-1) \cdot n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n},$$

$$n+1 = A \cdot n + B \cdot n - B,$$

$$1 = -B, \quad \text{dla } n=0$$

$$2 = A, \quad \text{dla } n=1$$

$$\frac{n+1}{(n-1) \cdot n} = \frac{2}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Wobec tego

$$\frac{n+1}{(n-1) \cdot n \cdot 2^n} = \frac{1}{(n-1) \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{n \cdot 2^n},$$

skąd po oznaczeniu $A_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{n+1}{(n-1) \cdot n \cdot 2^n} &= \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{(n-1) \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) = \sum_{n=2}^N (A_{n-1} - A_n) = A_1 - A_N = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{N \cdot 2^N} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

przy $N \rightarrow \infty$.*Odpowiedź*Suma danego szeregu jest równa $1/2$.*Sposób II*

Korzystając z rozkładu na ułamki proste wyprowadzonego w sposobie I oraz ze wzoru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

obliczamy sumę szeregu potęgowego (o promieniu zbieżności 1):

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n-1) \cdot n} \cdot x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1} \cdot x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^n = 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x = \\ &= (1-2x) \cdot \ln(1-x) + x, \end{aligned}$$

co dla $x = 1/2$ przyjmuje wartość $1/2$.

Punktacja:

20 punktów - rozwiązanie poprawne (4 prace).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (1 praca).

Liczba osób piszących kolokwium: **5**.

Suma uzyskanych punktów za to zadanie: **80**.

Mnożnik kolokwium: **13** (zaokrąglone $1000/80$).

Zadanie 93. (50 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx.$$

Możesz dostać **5 punktów** za dowód zbieżności całki bez wyznaczenia jej wartości.

Rozwiązanie:

Sposób I

Najpierw udowodnimy zbieżność danej całki. W tym celu zapiszemy ją w postaci sumy dwóch całek, a następnie zastosujemy kryterium porównawcze dla udowodnienia zbieżności składnika będącego całką niewłaściwą o nieujemnej funkcji podcałkowej:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx &= \int_0^1 \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx = - \int_0^1 \frac{1 - x^5}{x^7 + 1} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx, \\ \int_1^{\infty} \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx &\leq \int_1^{\infty} \frac{x^5 - 0}{x^7 + 0} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty. \end{aligned}$$

Następnie wykonamy podstawienie $x = 1/t$ i formalnie $dx = -dt/t^2$. Otrzymujemy:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx = \int_{\infty}^0 \frac{t^{-5} - 1}{t^{-7} + 1} \cdot \frac{-dt}{t^2} = \int_0^{\infty} \frac{t^{-5} - 1}{t^{-5} + t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{(t^{-5} - 1) \cdot t^5}{(t^{-5} + t^2) \cdot t^5} dt = \int_0^{\infty} \frac{1 - t^5}{1 + t^7} dt = -I,$$

skąd $I = -I$, czyli $I = 0$.

Odpowiedź

Dana całka jest zbieżna i ma wartość 0.

Sposób II

Dowodzimy zbieżności całki jak w sposobie I, a następnie wykonujemy podstawienie $x = e^t$, czyli $t = \ln x$, i formalnie $dx = e^t dt$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{5t} - 1}{e^{7t} + 1} \cdot e^t dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{6t} - e^t}{e^{7t} + 1} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{6t} - e^t) \cdot e^{-7t/2}}{(e^{7t} + 1) \cdot e^{-7t/2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{5t/2} - e^{-5t/2}}{e^{7t/2} + e^{-7t/2}} dt, \end{aligned}$$

co jest równe 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

Punktacja:

50 punktów - rozwiązanie poprawne (1 praca).

5 punktów - dowód zbieżności całki (1 praca).

2-3 punkty - dowód zbieżności całki z poważnymi usterkami (2 prace).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (1 praca).