

KOŁOKWIUM nr 9, 9.05.2017, godz. 12:15–13:25**Zadanie 17. (10 punktów)**

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}. \quad (1)$$

*Rozwiązanie:*Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(4n+4)! \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)! \cdot (n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}{(4n)! \cdot x^{2n}} \right| = \\ &= \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4) \cdot x^2}{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} \rightarrow \frac{64 \cdot x^2}{e} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $\frac{64 \cdot x^2}{e}$.Jeżeli $\frac{64 \cdot x^2}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt{e}}{8}$, to szereg (1) jest zbieżny.Jeżeli zaś $\frac{64 \cdot x^2}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{\sqrt{e}}{8}$, to szereg (1) jest rozbieżny.Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{\sqrt{e}}{8}$.**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt{e}}{8}$.

Zadanie 18. (10 punktów)

Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}$.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} = \int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} + \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_0^1 \frac{x^e dx}{0 + x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3-e}} < +\infty,$$

bo $3 - e < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + 0} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4-e}} < +\infty,$$

bo $4 - e > 1$.

Zadanie 19. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-1}^0 x \cdot \sqrt[3]{x+1} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt[3]{x+1}, \quad x = t^3 - 1$$

i formalnie

$$dx = 3t^2 dt.$$

Ponadto $x = -1$ odpowiada $t = 0$, a $x = 0$ odpowiada $t = 1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [-1, 0]$ odpowiada przedziałowi $t \in [0, 1]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x \cdot \sqrt[3]{x+1} dx &= \int_0^1 (t^3 - 1) \cdot t \cdot 3t^2 dt = 3 \cdot \int_0^1 t^6 - t^3 dt = 3 \cdot \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_{t=0}^1 = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) = 3 \cdot \frac{4-7}{28} = 3 \cdot \frac{-3}{28} = -\frac{9}{28}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-9/28$.