

Powtórka dotychczasowego materiału.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Na ćwiczeniach w środę 7.06.2017 (grupy 2-4)
należy wskazać zadania, które sprawiły najwięcej problemów.

431. W każdym z zadań **431.1-431.5** podaj wzór na funkcję różniczkowalną $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

431.1.	$f'(x) = (4x - 5)^{54}$	$f(1) = 1$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dots\dots\dots$			

431.2.	$f'(x) = \sqrt{3x+1}$	$f(1) = 1$	$D_f = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$
$f(x) = \dots\dots\dots$			

431.3.	$f'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^4}$	$f(1) = 1$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dots\dots\dots$			

431.4.	$f'(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$	$f(0) = 7$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dots\dots\dots$			

431.5.	$f'(x) = \frac{1}{(3x-5)^2+1}$	$f(2) = 0$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dots\dots\dots$			

432. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}.$$

433. W każdym z zadań **433.1-433.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

433.1. $\int_0^1 x^6 dx = \dots\dots\dots$	433.2. $\int_0^2 x^3 dx = \dots\dots\dots$
---	---

433.3. $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots$	433.4. $\int_1^3 \frac{dx}{x^3} = \dots\dots\dots$
--	---

433.5. $\int_0^{\pi/3} \sin x dx = \dots\dots\dots$	433.6. $\int_0^{\pi/6} \cos x dx = \dots\dots\dots$
--	--

433.7. $\int_1^7 \frac{x}{x^2+1} dx = \dots\dots\dots$	433.8. $\int_2^8 \frac{x}{x^2+1} dx = \dots\dots\dots$
---	---

433.9. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$	433.10. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$
---	--

434. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^2 \frac{x \, dx}{x^2 + 2x + 4}$.

435. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1}}$.

436. W każdym z zadań 436.1-436.10 podaj w postaci uproszczonej wartość granicy ciągu.

436.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \dots$

436.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \dots$

436.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \dots$

436.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2 + k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \dots$

436.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2 + k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \dots$

436.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n^2 + 1} + \frac{2}{3n^2 + 4} + \dots + \frac{k}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \dots$

436.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \dots$

436.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + 1} + \frac{n}{3n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \dots$

436.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + 1} + \frac{n}{3n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots$

436.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + (n+1)^2} + \frac{n}{3n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots$

437. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_6^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x} \, dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

438. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n}.$$

439. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić nierówności

$$C \cdot \pi^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 4n + 1}}{12n^4 + n^3 + 3} \leq 2C \cdot \pi^2.$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

440. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

441. W każdym z zadań **441.1-441.15** podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

Przedział może być nieograniczony (tzn. mieć koniec $\pm\infty$).

W zadaniach **441.11-441.15** ujawniono, że przedział jest obustronnie domknięty).

441.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.2. $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (p-3)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-11)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}+1}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}+n^{3p}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

441.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot p^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

441.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot p^n}{n^3}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

441.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot p^n}{n^{n+4}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

441.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot p^n}{n^{n+5}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

441.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot n! \cdot p^n}{n^{n+6}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

442. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_1^2 \frac{x^4 dx}{1 + \sqrt[3]{4x^5 - 3}}$.

443. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

444. W każdym z zadań **444.1-444.4** podaj cztery odpowiedzi.

444.1. Dla podanych liczb a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x} = \ln w$.

- a) $a = 1, b = 6, w = \dots\dots\dots$
 b) $a = 2, b = 16, w = \dots\dots\dots$
 c) $a = 1, b = 25, w = \dots\dots\dots$
 d) $a = 6, b = 25, w = \dots\dots\dots$

444.2. Dla podanej liczby a podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną b większą od a , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{6}$.

- a) $a = 1, b = \dots\dots\dots$
 b) $a = 2, b = \dots\dots\dots$
 c) $a = 3, b = \dots\dots\dots$
 d) $a = 4, b = \dots\dots\dots$

444.3. Dla podanych granic całkowania a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = w \cdot \pi$.

- a) $a = -\infty, b = -1, w = \dots\dots\dots$
 b) $a = -\infty, b = 0, w = \dots\dots\dots$
 c) $a = -1, b = +\infty, w = \dots\dots\dots$
 d) $a = 0, b = +\infty, w = \dots\dots\dots$

444.4. Dla podanych liczb a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{x dx}{x^2 + 11} = \ln w$.

- a) $a = 1, b = 4, w = \dots\dots\dots$
 b) $a = 2, b = 7, w = \dots\dots\dots$
 c) $a = 1, b = 8, w = \dots\dots\dots$
 d) $a = 4, b = 8, w = \dots\dots\dots$

445. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^n}{(2n)! \cdot n^n}$$

446. W każdym z zadań **446.1-446.15** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in D_f\}$.

446.1. $f(x) = 7 \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.2. $f(x) = 7 \sin x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.3. $f(x) = 7 \sin^2 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.4. $f(x) = 7 \sin^3 x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.5. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = \left(\frac{1}{8}, 8\right)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.6. $f(x) = \log_2 x - 2$, $D_f = (2, 32)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.7. $f(x) = (\log_2 x)^2 - 6$, $D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.8. $f(x) = (\log_2 x)^3 - 6$, $D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.9. $f(x) = (\log_2 x)^4 - 6$, $D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.11. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.12. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.14. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

446.15. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x$, $D_f = (1, +\infty)$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

447. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_5^\infty \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

448. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}$.

449. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^3 15x \cdot \sqrt{x+1} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

450. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$.

451. Wyznaczyć taką liczbę naturalną n , że krzywa o równaniu $y = x^n$ dzieli zbiór $\{(x, y) : x \in [0, 1] \wedge x^5 \leq y \leq x\}$

na dwa obszary o równych polach.

452. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n! \cdot n^n}.$$

453. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)}$.

454. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}.$$

455. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_1^6 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}$. Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

456. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

457. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{2\pi} x \cos x dx$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

458. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

459. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

460. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 2x + 2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

461. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$.

462. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4}$.

463. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}{(n!)^n}.$$

464. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3 + 1} + \frac{4}{n^3 + 8} + \frac{9}{n^3 + 27} + \dots + \frac{k^2}{n^3 + k^3} + \dots + \frac{4n^2}{n^3 + 8n^3} \right).$$

465. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3} + n^{3/2}}$.

466. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)}$.