

Zadania na ćwiczenia w środę 14.06.2017 (grupy 2–4).

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta i kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z , że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R = 0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R = +\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

467. Ciąg (z_n) o wyrazach zespolonych dany jest wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2 + ni} - n.$$

Wyjaśnić, dlaczego powyższa definicja nie jest jednoznaczna i zaproponować możliwe sposoby jej doprecyzowania. Wybrać taki sposób jej doprecyzowania, aby podany ciąg był zbieżny i obliczyć jego granicę.

468. To samo dla ciągu zespolonego danego wzorem:

$$z_n = \sqrt{n^2 + 2ni} + n.$$

Zbadać zbieżność zespolonych szeregów liczbowych:

$$\text{469. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1} \quad \text{470. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i} \quad \text{471. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} \quad \text{472. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i}$$

473. Obliczyć sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej kilka jego początkowych sum częściowych.

Zapisać szeregi (o wyrazach rzeczywistych) części rzeczywistych i urojonych jego wyrazów. Podać sumy tych szeregów (z jednej strony uzyskać je z sumy danego szeregu zespolonego, a z drugiej strony wyliczyć bezpośrednio).

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

$$\text{474. } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \quad \text{475. } \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad \text{476. } \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad \text{477. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{\sqrt{n}} \quad \text{478. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$$

479. Przypomnieć sobie rozwinięcie funkcji rzeczywistej arctg w szereg potęgowy (wokół zera). Zinterpretować ten szereg jako zespolony szereg potęgowy i wyznaczyć jego obszar zbieżności.

480. Rozważamy zespolony szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n \cdot 3^n}}{n}.$$

Wyznaczyć promień zbieżności tego szeregu.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu w punktach $z = e^{k\pi i/3^m}$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq k < 2 \cdot 3^m$.

Przyjrzyć się dokładnie przypadkom $(m, k) = (5, 1)$ oraz $(m, k) = (5, 2)$ zaznaczając osiem początkowych (niezerowych) wyrazów szeregu na płaszczyźnie zespolonej.