

Kolokwium nr 55: poniedziałek 3.04.2017, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–227, 501–570.

Całki niewłaściwe - obliczanie, kryterium porównawcze.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 31.03.2017 (grupa 1 LUX).

OSZUSTWO **561.** (funkcja ciągła nieujemna mająca całkę mniejszą od zera):

Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze, a zatem obliczenie całki $\int_{-1}^1 f(x)dx$ nie powinno nastroczać trudności. Ponieważ

$$f(x) = \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})}$$

poza pojedynczym punktem $x = 0$, po wykonaniu podstawienia $t = e^{1/x}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} = - \int_{1/e}^e \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= -\operatorname{arctg} t \Big|_{1/e}^e = -\operatorname{arctg} e + \operatorname{arctg} \frac{1}{e} = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} e < 0 \end{aligned}$$

Wyjaśnić, na czym polega oszustwo i obliczyć prawdziwą wartość całki $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartość tych, które są zbieżne:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{562.} \int_{-2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2(e^{2/x} + e^{-2/x} + 2)} dx & \mathbf{563.} \int_{-1}^1 \ln|x| dx & \mathbf{564.} \int_1^{+\infty} \frac{7x^2 + 8x - 9}{x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x} dx \end{array}$$

Podać przykład takiej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

565. $f(n) = \frac{1}{n}$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

566. $f(n) = \frac{1}{n^2}$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

567. $f(n) = n$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

568. $f(n) = 0$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

569. $f(n) = e^n$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

570. $f(n) = 1$, a przy tym $\int_1^{\infty} f(x)dx = 1$ oraz $\int_1^{\infty} (f(x))^2 dx = 1000$.