

Kolokwium nr 56: poniedziałek 10.04.2017, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–272, 501–592.

Szeregi liczbowe o wyrazach nieujemnych - badanie zbieżności.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w poniedziałek 3.04.2017 (grupa 1 LUX).

Nie wszystkie zadania będą szczegółowo rozwiązane.

Należy umieć wskazać zadania, które sprawiły najwięcej problemów.

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

571. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n , $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

572. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

573. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

574. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leq 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

575. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n , szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

576. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

577. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

578. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

579. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \dots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

580. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

581. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k + \sqrt{n}} - 4}{8n^4 - 3n^3 + 5}$$

w zależności od parametru naturalnego k .

582. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^7 + 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1} + 1}}{n^7 + 1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k , że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

583. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

jest rozbieżny.

584. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot a^n}{n! \cdot n^{2n}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

585. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Przypomnienie: $(2n+1)!! = \prod_{i=0}^n (2i+1)$.

586. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

587. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n}$

588. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+1}}$

589. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+2}}$

590. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich są zbieżne. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ jest zbieżny.

591. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ o wyrazach dodatnich są zbieżne. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n b_n c_n}$ jest zbieżny.

592. Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej g podać przykład ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich spełniającego warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = g.$$

Dla podanych przykładów zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dla jednej wartości g podać dwa przykłady, prowadzące do szeregu zbieżnego i rozbieżnego.

Szeregi liczbowe o wyrazach dowolnego znaku – – badanie zbieżności.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w poniedziałek 10.04.2017 (grupa 1 LUX).

Nie wszystkie zadania będą szczegółowo rozwiązane.

Należy umieć wskazać zadania, które sprawiły najwięcej problemów.

593. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, podaj jego sumę.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{7n+10} & \text{(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{3n^2+n} & \text{(C)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+n} \\
 \text{(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+1} & \text{(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n^2+1)}{77n-1} & \text{(F)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{2011n+2012}
 \end{array}$$

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

594. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdzie

- | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|
| a) $g = -3$ | b) $g = -1$ | c) $g = -1/3$ |
| d) $g = 0$ | e) $g = 1/3$ | f) $g = 1$ |
| | | g) $g = 3$ |

595. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

- | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|
| a) $g = -3$ | b) $g = -1$ | c) $g = -1/3$ |
| d) $g = 0$ | e) $g = 1/3$ | f) $g = 1$ |
| | | g) $g = 3$ |

596. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

- | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|
| a) $g = -3$ | b) $g = -1$ | c) $g = -1/3$ |
| d) $g = 0$ | e) $g = 1/3$ | f) $g = 1$ |
| | | g) $g = 3$ |

597. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, gdzie

- | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|
| a) $g = -3$ | b) $g = -1$ | c) $g = -1/3$ |
| d) $g = 0$ | e) $g = 1/3$ | f) $g = 1$ |
| | | g) $g = 3$ |

598. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

- | | |
|------------------------------|--|
| a) ciągu (a_n) | b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ |
| c) ciągu (b_n) | d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ |
| e) ciągu $(a_n + b_n)$ | f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ |
| g) ciągu $(c_n + d_n)$ | h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$ |
| i) ciągu $(a_n + c_n)$ | j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$ |
| k) ciągu $(a_n + d_n)$ | l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + d_n)$ |
| m) ciągu $(b_n + c_n)$ | n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ |
| o) ciągu $(b_n + d_n)$ | p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)$ |

599. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

600. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

601. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ jest rozbieżny.

602. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ jest rozbieżny.

603. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^9$ są zbieżne, a szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^7$ są rozbieżne.