

Szeregi Fouriera. Liczby zespolone.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w poniedziałek 8.05.2017
i piątek 12.05.2017 (grupa 1 *LUX*).

Omówimy też zadania **373–379 z listy 8**.

621. Obliczyć wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości całek:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} dx &= \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2}}, \\ \int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}} dx &= \frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}}, \\ \int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx \, dx &= (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2}, \\ \int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx \, dx &= (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2}.\end{aligned}$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \quad \text{oraz} \quad B = e^{2\pi\sqrt{2}} + 1.$$

622. Rozwiązać równanie $z^5 = 1$ bez użycia funkcji trygonometrycznych.

Wskazówka: $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + az + 1)(z^2 + bz + 1)$

Wyjaśnić, czemu wskazówka zadziałała.

Na podstawie uzyskanego rozwiązania równania podać wartości sinusa i cosinusa dla odpowiednich (ciekawych) kątów.

Uprościć wyrażenia (w uproszczonej formie nie może występować więcej niż jeden symbol $\arctg$):

623. $\arctg 3 + \arctg 7$

624. $\arctg 2 + \arctg 8$

625. $\arctg 5 + \arctg 8$

626. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$f''(x) = \cos^4 x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

a ponadto $f(0) = f(\pi) = 0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

627. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a < 5$, że $\int_a^5 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$.

628. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$ sprowadzając wynik do postaci $\frac{a+b\cos x}{c+d\cos x}$, gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.