

Kolokwium nr 59: poniedziałek 5.06.2017, godz. 8:15, materiał zad. 1–430, 501–628.

Powtórka dotychczasowego materiału.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Na ćwiczeniach w poniedziałek 5.06.2017 (grupa 1 LUX)
należy wskazać zadania, które sprawiły najwięcej problemów.

629. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[7]{x^5 + 1} dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n .

630. Wyrazić całkę nieoznaczoną

$$I_n(x) = \int x^n \cdot \sin \sqrt{x} dx$$

za pomocą $I_{n-1}(x)$.

631. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^5 + 2x^4 + x^3}}.$$

632. W każdym z zadań **632.1-632.13** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$\mathbf{632.1.} \quad \int_{-1}^1 x^3 \cdot \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad \mathbf{632.2.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{632.3.} \quad \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad \mathbf{632.4.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} - |x| dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{632.5.} \quad \int_{-1}^1 |x| dx = \dots\dots\dots \quad \mathbf{632.6.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{632.7.} \quad \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad \mathbf{632.8.} \quad \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{632.9.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad \mathbf{632.10.} \quad \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{632.11.} \quad \int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx = \dots\dots\dots \quad \mathbf{632.12.} \quad \int_0^6 \sqrt{6x-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{632.13.} \quad \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx = \dots\dots\dots$$

633. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_{-1}^{1/13} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{(x+2)^2} dx$.
Zapisać wynik jako liczbę wymierną.

634. Dane są takie ciągi (a_n) , (b_n) i (c_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 = 1$.
Dowieść, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n \leq 1$.

635. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \frac{1}{121} - \frac{1}{144} + \frac{1}{169} - \dots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

636. Dane są takie ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) i (d_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{12} = 1$.
Dowieść, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n \leq 1$.

637. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7+1} dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n .

638. Funkcja $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \int_1^x (\log_2 t - 3)^{2017} dt.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

639. Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F , gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\sin 2^n x}{333^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leq m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

640. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ też jest zbieżny.