

Zadania na środy 10,17.05.2017 (grupy 2–4).

Nie wszystkie zadania będą szczegółowo rozwiązane.

Należy umieć wskazać zadania, które sprawiły najwięcej problemów.

Jednostajna zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych.

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|.$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciąg funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do funkcji f określonej na tej samej dziedzinie, co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g , to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli $\|f_n\| \not\rightarrow 0$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n.$$

Analogicznie w przypadku pochodnych wyższych rzędów.

Obliczyć normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

349. $f(x) = \frac{1}{x^2+3}, \quad D_f = \mathbb{R}$

351. $f(x) = x^2, \quad D_f = (-1, 2)$

353. $f(x) = \arctg x, \quad D_f = \mathbb{R}$

355. $f(x) = \sin x + \cos x, \quad D_f = \mathbb{R}$

357. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

358. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

359. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{\binom{3n}{n}^2}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją pięciokrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu piętego włącznie.

360. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

Szeregi Fouriera

Szeregiem Fouriera funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2π , całkowalnej na przedziale długości 2π , nazywamy szereg

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru dolnej granicy przedziału całkowania.

Jeżeli ponadto funkcja f jest przedziałami monotoniczna oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

to f jest (punktowo) sumą swojego szeregu Fouriera.

Równość Parsevala:

$$\int_A^{A+2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji

361. $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

362. $f(x) = |x|$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

363. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

364. $f(x) = x^2$ dla $x \in (0, 2\pi)$

365. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

366. $f(x) = e^x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

367. $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in (0, 2\pi)$

368. $f(x) = e^{|x|}$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

369. $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ dla $x \in (0, 2\pi)$

370. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ \cos x & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

371. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

372. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } 0 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{dla } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$

373. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ stosując wzór Parsevala do $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$ oraz wstawiając $x=0$ do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwa wyniki.

374. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2}$ wstawiając $x=0$ do szeregu Fouriera funkcji f określonej wzorem $f(x) = \cos(x\sqrt{2})$ na $(0, 2\pi)$.

375. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ używając $f(x) = x(\pi - |x|)$ na $(-\pi, \pi)$.

W kolejnych czterech zadaniach zakładamy, że funkcja f jest na tyle regularna, że nie ma problemu z obliczeniem współczynników jej szeregu Fouriera, a przy tym f jest sumą swojego szeregu Fouriera.

376. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $2\pi/3$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 3.

377. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{\pi}{2}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 4.

378. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{2\pi}{5}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 5.

379. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowa o okresie 2π . Dowieść, że f spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy
<<< podać warunek w języku współczynników szeregu Fouriera funkcji f >>>