

Kolokwium nr 10: wtorek 6.06.2017, godz. 12:15-13:45, materiał zad. 1-430.

## Liczby zespolone i ich zastosowanie do wyprowadzania tożsamości trygonometrycznych.

Zadania na środy 24,31.05.2017 (grupy 2-4).

Nie wszystkie zadania będą szczegółowo rozwiązane.

Należy umieć wskazać zadania, które sprawiły najwięcej problemów.

**380.** Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right),$$

jeśli  $b \neq 0$ .

Rozwiązać równania i układy równań:

**381.**  $\bar{z} = z^2$       **382.**  $\bar{z} = z^{-1}$       **383.**  $1+i = z^2$       **384.**  $3+4i = z^2$       **385.**  $z^2 \bar{z} = 8i$

**386.**  $-3+4i = z^2$       **387.**  $z^2 + z = i$       **388.**  $z^2 + iz = 1$       **389.**  $z = \bar{z} + 1$

**390.**  $\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_2^2 = z_1 \end{cases}$       **391.**  $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 + z_2 = -1 \end{cases}$       **392.**  $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 1 \\ z_2 + iz_1 = 2 \end{cases}$       **393.**  $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 1 \\ \bar{z}_1 + z_2 = i \end{cases}$

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej:

**394.**  $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z^2 \geq 0$       **395.**  $3|z| \leq |z^2| + 1$       **396.**  $|z| = |\bar{z} + 1|$

**397.**  $|z+i| \leq |z-i|$       **398.**  $\operatorname{Im} \frac{z}{z^2+1} = 0$       **399.**  $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z} = 0$

**400.** W trójkącie prostokątnym  $PQD$  kąt przy wierzchołku  $P$  jest prosty, a przy tym  $PQ = 1$  i  $PD = 4$ . Ponadto punkt  $C$  jest środkiem odcinka  $PD$ , punkt  $A$  jest środkiem odcinka  $PC$ , punkt  $B$  jest środkiem odcinka  $AC$ . Punkt  $E$  leży na prostej  $PD$ , przy czym

$$\sphericalangle PQA + \sphericalangle PQB + \sphericalangle PQC = \sphericalangle PQD + \sphericalangle PQE.$$

Obliczyć  $PE$ .

**401.** Niech  $z = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$ . Dla podanych liczb  $m, n$  podać taką liczbę całkowitą  $k$ , aby zachodziła równość  $z^m \cdot \bar{z}^n = z^k$ . Uwaga na sprzężenie w drugim czynniku po lewej stronie.

- a)  $m = 10, \quad n = 1, \quad k = \dots\dots;$
- b)  $m = 15, \quad n = 2, \quad k = \dots\dots;$
- c)  $m = 20, \quad n = 3, \quad k = \dots\dots;$
- d)  $m = 50, \quad n = 4, \quad k = \dots\dots.$

**402.** Dla podanej liczby zespolonej  $z$  podać najmniejszą liczbę naturalną  $n > 1$  taką, że  $z^n = z$ .

- a)  $z = i$ ,  $n = \dots$ ;
- b)  $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ,  $n = \dots$ ;
- c)  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ ,  $n = \dots$ ;
- d)  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ,  $n = \dots$ .

**403.** Rozwiązać równanie

$$z\bar{z} = z + \bar{z}$$

w liczbach zespolonych. Opisać, jaką figurą geometryczną na płaszczyźnie zespolonej jest zbiór rozwiązań.

**404.** Czy nierówność  $|z+1| < |z-4|$  jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$ ;
- b)  $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$ ;
- c)  $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$ ;
- d)  $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$ ?

**405.** Czy równość  $\bar{z}^2 = z^{-2}$  (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a)  $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$ ;
- b)  $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$ ;
- c)  $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$ ;
- d)  $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$ ?

**406.** Czy podana liczba zespolona spełnia równanie  $z^6 = -64$

- a)  $z = 1 + i\sqrt{3}$ ;
- b)  $z = -1 + i\sqrt{3}$ ;
- c)  $z = \sqrt{3} + i$ ;
- d)  $z = -\sqrt{3} + i$ ?

**407.** Czy równość  $z^{13} = z$  jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a)  $z = -i$ ;
- b)  $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ ;
- c)  $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ;
- d)  $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ?

**408.** Czy równość  $\bar{z}^{13} = z^{-13}$  (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a)  $z = \frac{3+4i}{5}$ ;
- b)  $z = \frac{5+8i}{9}$ ;
- c)  $z = \frac{5+i\sqrt{23}}{8}$ ;
- d)  $z = \frac{6+i\sqrt{13}}{7}$ ?

**409.** Niech  $R(m, n)$  będzie liczbą takich liczb zespolonych  $z$ , że

$$(z^m - 1) \cdot (z^n - 1) = 0.$$

Czy wtedy

- a)  $R(2, 3) = 5$ ;
- b)  $R(3, 4) = 6$ ;
- c)  $R(4, 6) = 8$ ;
- d)  $R(3, 6) = 8$ ?

**410.** Czy dla podanych liczb zespolonych  $z_1, z_2, z_3$  istnieje taka liczba zespolona  $z$ , że

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$$

- a)  $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 13 + 4i$ ;
- b)  $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 8 + 8i$ ;
- c)  $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 5 + 9i$ ;
- d)  $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 7 + 11i$ ?

**411.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia nierówność  $|z - 1| \leq |z - 3|$

- a)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$  .....
- b)  $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$  .....
- c)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$  .....
- d)  $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$  .....

**412.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia nierówność  $|z - i| \leq |z - 5i|$

- a)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$  .....
- b)  $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$  .....
- c)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$  .....
- d)  $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$  .....

**413.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia równanie  $\bar{z} = z^{-1}$

a)  $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$  .....

b)  $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$  .....

c)  $z = 2 + 3i$  .....

d)  $z = 3 + 4i$  .....

**414.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia równanie  $z^6 = 1$

a)  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  .....

b)  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  .....

c)  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  .....

d)  $z = i$  .....

**415.** Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia równanie  $z^8 = 1$

a)  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  .....

b)  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  .....

c)  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  .....

d)  $z = i$  .....

**416.** Czy nierówność  $|z - 1| < |z - 5|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  .....

b)  $z = 2 + 2i$  .....

c)  $z = 3 + 3i$  .....

d)  $z = 4 + 4i$  .....

**417.** Czy nierówność  $|z| < |z - 4i|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  .....

b)  $z = 2 + 2i$  .....

c)  $z = 3 + 3i$  .....

d)  $z = 4 + 4i$  .....

**418.** Czy nierówność  $|z - 5 - 5i| < |z + 1 + i|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  .....

b)  $z = 2 + 2i$  .....

c)  $z = 3 + 3i$  .....

d)  $z = 4 + 4i$  .....

**419.** Czy nierówność  $|z - 7| < |z - 7i|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  .....

b)  $z = 2 + 2i$  .....

c)  $z = 3 + 3i$  .....

d)  $z = 4 + 4i$  .....

**420.** Czy liczba  $(\sqrt{3} + i)^n$  jest rzeczywista dla

a)  $n = 2012$  .....

b)  $n = 2013$  .....

c)  $n = 2014$  .....

d)  $n = 2016$  .....

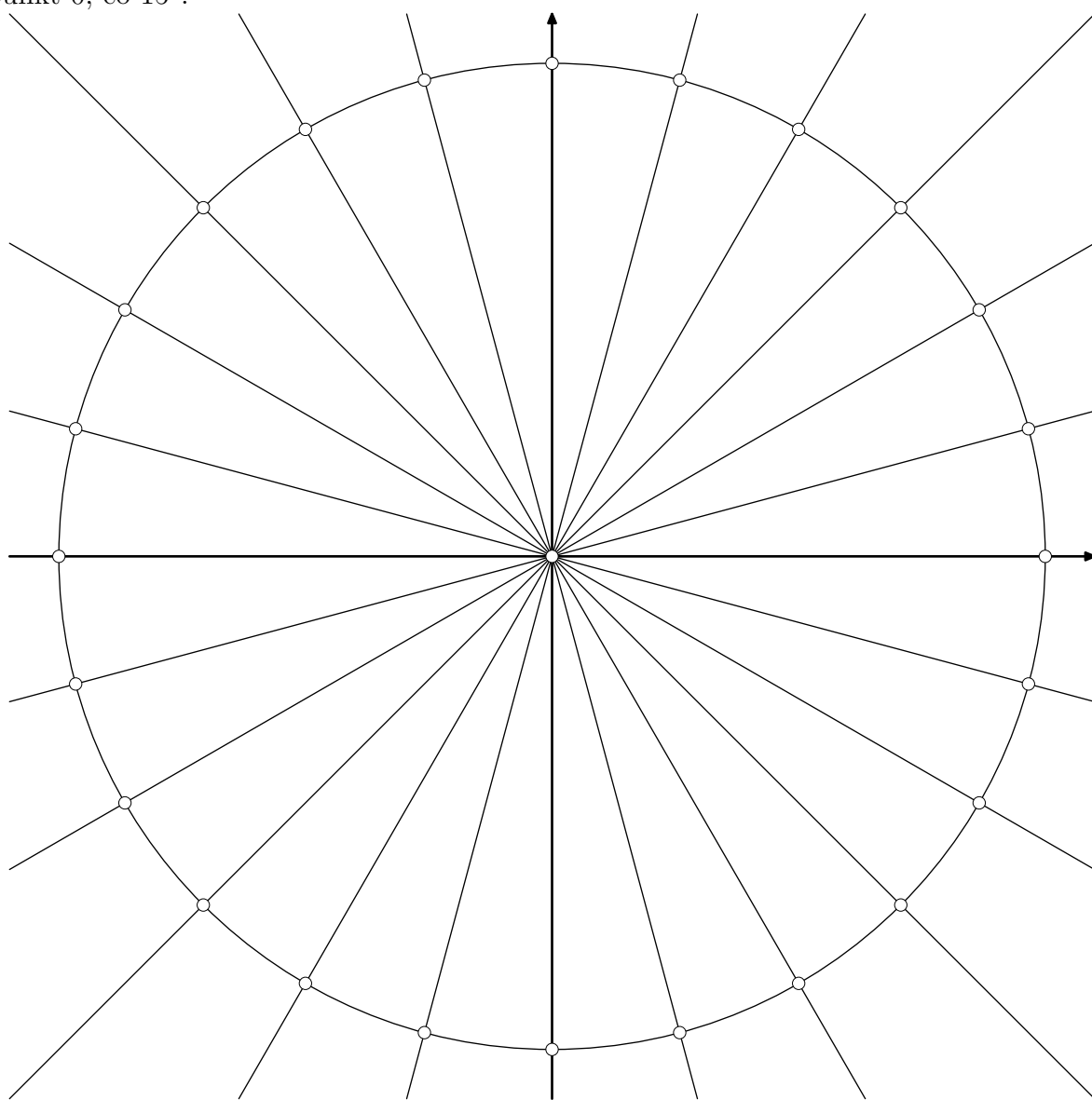
**421.** Czy liczba  $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^n$  jest rzeczywista dla

- a)  $n = 2012$  .....      b)  $n = 2013$  .....      c)  $n = 2014$  .....      d)  $n = 2016$  .....

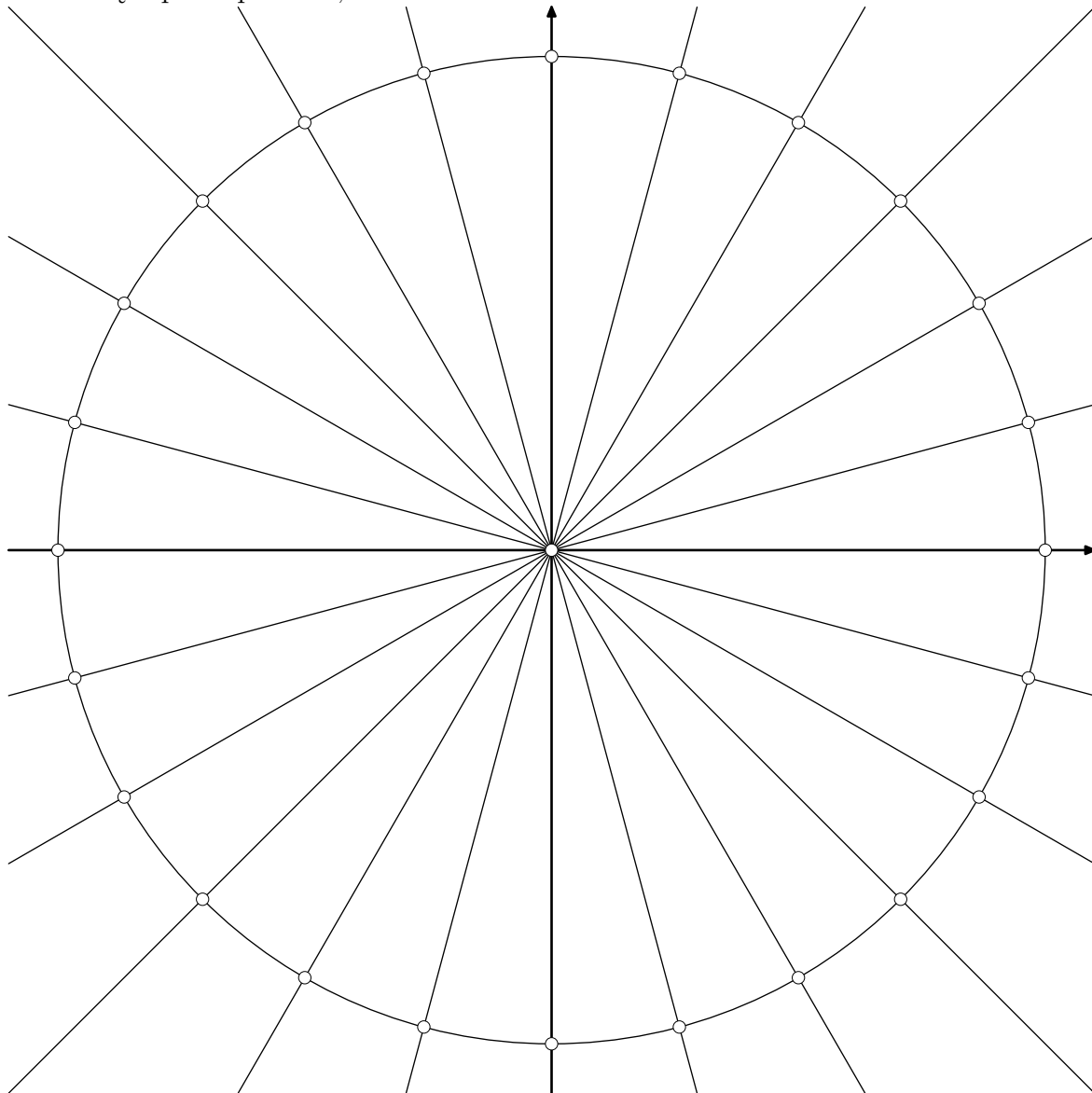
**422.** Czy liczba  $(-1 + i)^n$  jest rzeczywista dla

- a)  $n = 2012$  .....      b)  $n = 2013$  .....      c)  $n = 2014$  .....      d)  $n = 2016$  .....

**423.** Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania  $z^{27} + z^{16} = z^{24} + z^{19}$  w liczbach zespolonych. Podać liczbę rozwiązań, zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (można używać znaków " $\pm$ " i " $\pm_2$ " dla zapisania kilku rozwiązań jednym wzorem) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co  $15^\circ$ .



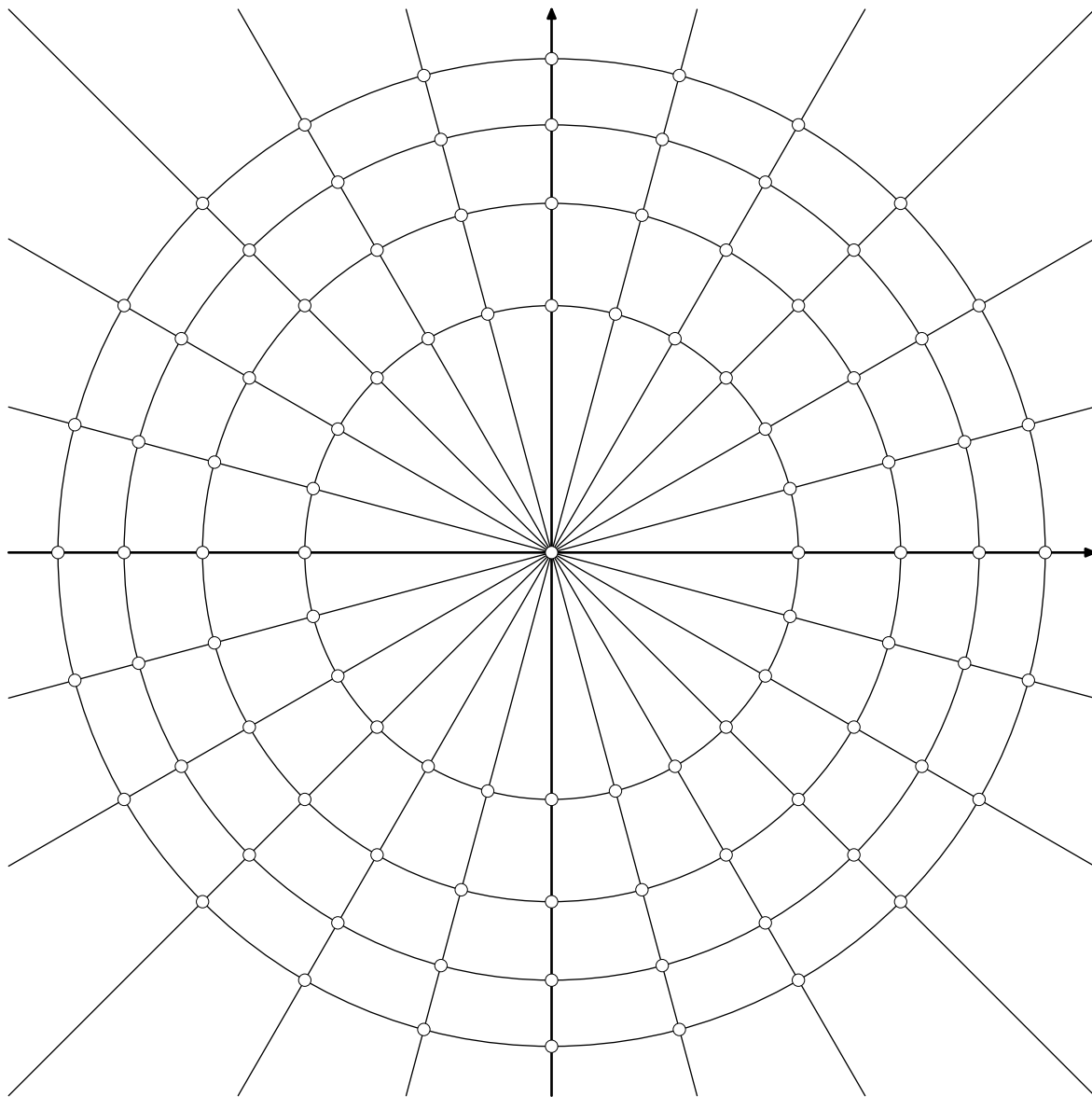
**424.** Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania  $z^3 = i$  w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co  $15^\circ$ .



**425.** Obliczyć wartość całki oznaczonej  $\int_0^{2\pi} \cos^6 x \, dx$ .

**426.** Obliczyć wartość całki oznaczonej  $\int_0^{\pi} \sin^{2016} x - \cos^{2016} x \, dx$ .

**427.** Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania  $z^4 = -4$  w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach  $\sqrt{n}$  dla  $n = 1, 2, 3, 4$  oraz proste przechodzące przez punkt 0, co  $15^\circ$ .



**428.** Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję  $f$  określoną wzorem

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 5x \cdot \cos 7x.$$

**429.** Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję  $f$  określoną wzorem  $f(x) = \sin^8 x$ .

**430.** Obliczyć całkę oznaczoną  $\int_{8\pi/7}^{22\pi/7} \cos^{10} x$ .