

401. Niech $z = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$. Dla podanych liczb m, n podać taką liczbę całkowitą k , aby zachodziła równość $z^m \cdot \bar{z}^n = z^k$. Uwaga na sprzężenie w drugim czynniku po lewej stronie.

- a) $m = 10, \quad n = 1, \quad k = \mathbf{9}$;
- b) $m = 15, \quad n = 2, \quad k = \mathbf{13}$;
- c) $m = 20, \quad n = 3, \quad k = \mathbf{17}$;
- d) $m = 50, \quad n = 4, \quad k = \mathbf{46}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $|z| = 1$, zachodzi równość $\bar{z} = z^{-1}$, a w konsekwencji $\bar{z}^n = z^{-n}$. Zatem poprawna odpowiedź to $k = m - n$.

402. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą liczbę naturalną $n > 1$ taką, że $z^n = z$.

- a) $z = i, \quad n = \mathbf{5}$;
- b) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad n = \mathbf{9}$;
- c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \quad n = \mathbf{4}$;
- d) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad n = \mathbf{13}$.

Rozwiązanie:

Podane liczby zespolone mają moduł 1 i argumenty odpowiednio: $\pi/2, \pi/4, 2\pi/3, -\pi/6$, skąd wynika, że są one pierwiastkami z jedności odpowiednio stopni 4, 8, 3 i 12.

403. Rozwiązać równanie

$$z\bar{z} = z + \bar{z}$$

w liczbach zespolonych. Opisać, jaką figurą geometryczną na płaszczyźnie zespolonej jest zbiór rozwiązań.

Rozwiązanie:

Sposób I

Przekształcając dane w treści zadania równanie otrzymujemy kolejno równania równoważne:

$$z\bar{z} - z - \bar{z} = 0,$$

$$z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = 1,$$

$$(z-1)(\bar{z}-1) = 1,$$

$$(z-1)\overline{(z-1)} = 1,$$

$$|z-1|^2 = 1,$$

$$|z-1| = 1,$$

skąd wynika, że zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb odległych na płaszczyźnie zespolonej o 1 od liczby 1, czyli okrąg o środku 1 i promieniu 1.

Sposób II

Po podstawieniu $z = x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, dane w zadaniu równanie przyjmuje kolejno postać:

$$(x + yi)(x - yi) = x + yi + x - yi,$$

$$x^2 + y^2 = 2x,$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1,$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

a zatem zbiorem rozwiązań jest okrąg o promieniu 1 i środku $(x, y) = (1, 0)$, czyli $z = 1$.

404. Czy nierówność $|z + 1| < |z - 4|$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$; **NIE**
- b) $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$; **TAK**
- c) $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$; **NIE**
- d) $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$; **TAK**

405. Czy równość $\bar{z}^2 = z^{-2}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$; **TAK**
- b) $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$; **TAK**
- c) $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$; **NIE**
- d) $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$; **TAK**

406. Czy podana liczba zespolona spełnia równanie $z^6 = -64$

- a) $z = 1 + i\sqrt{3}$; **NIE**
- b) $z = -1 + i\sqrt{3}$; **NIE**
- c) $z = \sqrt{3} + i$; **TAK**
- d) $z = -\sqrt{3} + i$; **TAK**

407. Czy równość $z^{13} = z$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = -i$; **TAK**
- b) $z = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$; **TAK**
- c) $z = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$; **NIE**
- d) $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$; **TAK**

408. Czy równość $\bar{z}^{13} = z^{-13}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \frac{3+4i}{5}$; **TAK**
- b) $z = \frac{5+8i}{9}$; **NIE**
- c) $z = \frac{5+i\sqrt{23}}{8}$; **NIE**
- d) $z = \frac{6+i\sqrt{13}}{7}$; **TAK**

409. Niech $R(m, n)$ będzie liczbą takich liczb zespolonych z , że

$$(z^m - 1) \cdot (z^n - 1) = 0.$$

Czy wtedy

- a) $R(2, 3) = 5$; **NIE**
- b) $R(3, 4) = 6$; **TAK**
- c) $R(4, 6) = 8$; **TAK**
- d) $R(3, 6) = 8$; **NIE**

410. Czy dla podanych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 istnieje taka liczba zespolona z , że

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$$

- a) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 13 + 4i$; **TAK**
- b) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 8 + 8i$; **NIE**
- c) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 5 + 9i$; **TAK**
- d) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = 7 + 11i$; **TAK**

411. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - 1| \leq |z - 3|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ **TAK**
- b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$ **NIE**
- c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ **TAK**
- d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$ **NIE**

412. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - i| \leq |z - 5i|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ **TAK**
- b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$ **TAK**
- c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ **NIE**
- d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$ **NIE**

413. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $\bar{z} = z^{-1}$

a) $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ **TAK**

b) $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ **NIE**

c) $z = 2 + 3i$ **NIE**

d) $z = 3 + 4i$ **NIE**

414. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^6 = 1$

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **NIE**

b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ **NIE**

c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **TAK**

d) $z = i$ **NIE**

415. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^8 = 1$

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **TAK**

b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ **NIE**

c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **NIE**

d) $z = i$ **TAK**

416. Czy nierówność $|z - 1| < |z - 5|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ **TAK** b) $z = 2 + 2i$ **TAK** c) $z = 3 + 3i$ **NIE** d) $z = 4 + 4i$ **NIE**

417. Czy nierówność $|z| < |z - 4i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ **TAK** b) $z = 2 + 2i$ **NIE** c) $z = 3 + 3i$ **NIE** d) $z = 4 + 4i$ **NIE**

418. Czy nierówność $|z - 5 - 5i| < |z + 1 + i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ **NIE** b) $z = 2 + 2i$ **NIE** c) $z = 3 + 3i$ **TAK** d) $z = 4 + 4i$ **TAK**

419. Czy nierówność $|z - 7| < |z - 7i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ **NIE** b) $z = 2 + 2i$ **NIE** c) $z = 3 + 3i$ **NIE** d) $z = 4 + 4i$ **NIE**

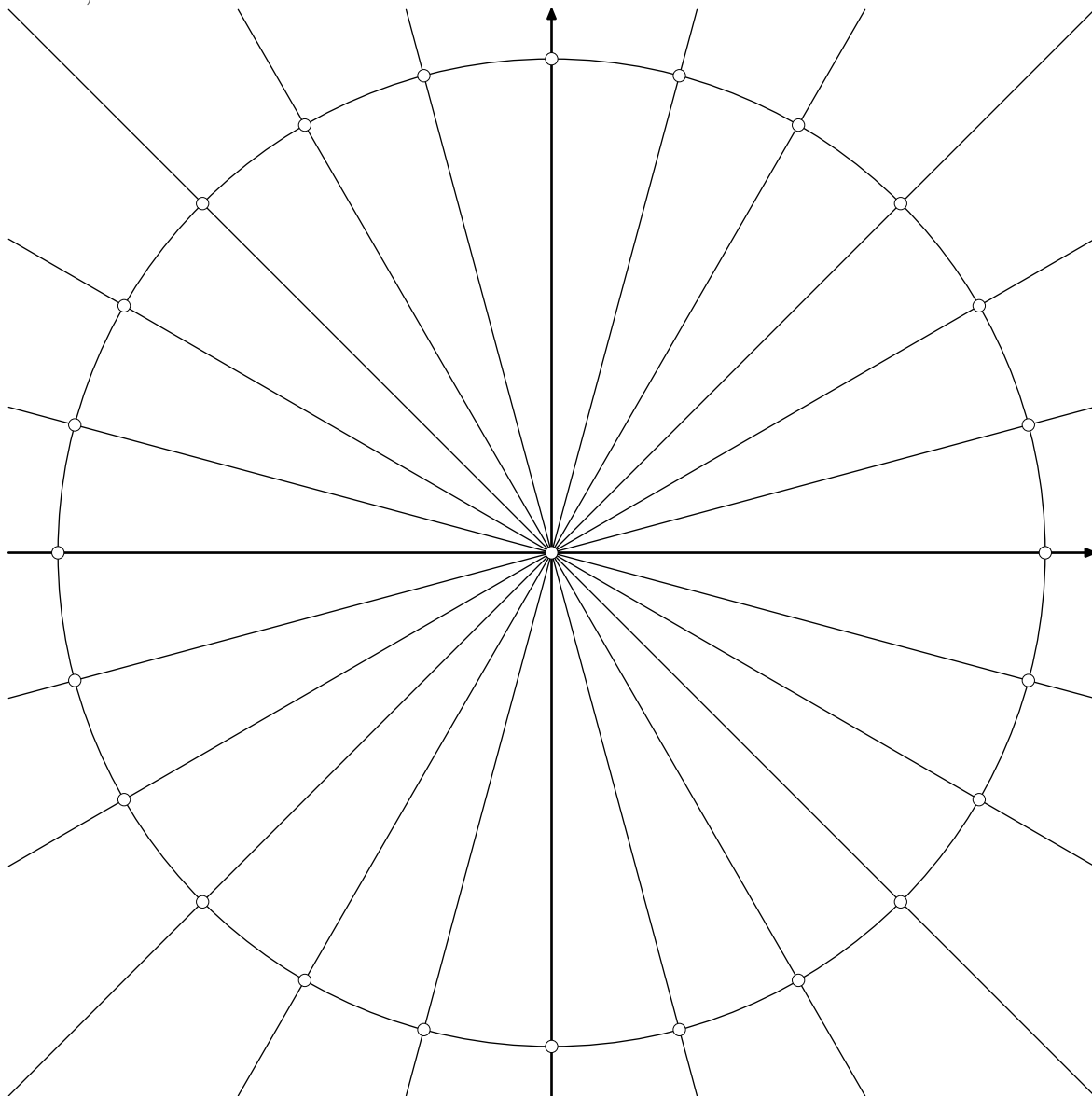
420. Czy liczba $(\sqrt{3} + i)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n = 2012$ **NIE** b) $n = 2013$ **NIE** c) $n = 2014$ **NIE** d) $n = 2016$ **TAK**

421. Czy liczba $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^n$ jest rzeczywista dla
 a) $n = 2012$ **NIE** b) $n = 2013$ **TAK** c) $n = 2014$ **NIE** d) $n = 2016$ **TAK**

422. Czy liczba $(-1 + i)^n$ jest rzeczywista dla
 a) $n = 2012$ **TAK** b) $n = 2013$ **NIE** c) $n = 2014$ **NIE** d) $n = 2016$ **TAK**

423. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^{27} + z^{16} = z^{24} + z^{19}$ w liczbach zespolonych. Podać liczbę rozwiązań, zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (można używać znaków " $\pm$ " i " $\pm_2$ " dla zapisania kilku rozwiązań jednym wzorem) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



Rozwiązanie:

Przekształcając dane równanie otrzymujemy kolejno:

$$z^{27} - z^{24} - z^{19} + z^{16} = 0,$$

$$(z^3 - 1) \cdot z^{24} - (z^3 - 1) \cdot z^{16} = 0,$$

$$(z^3 - 1) \cdot (z^{24} - z^{16}) = 0,$$

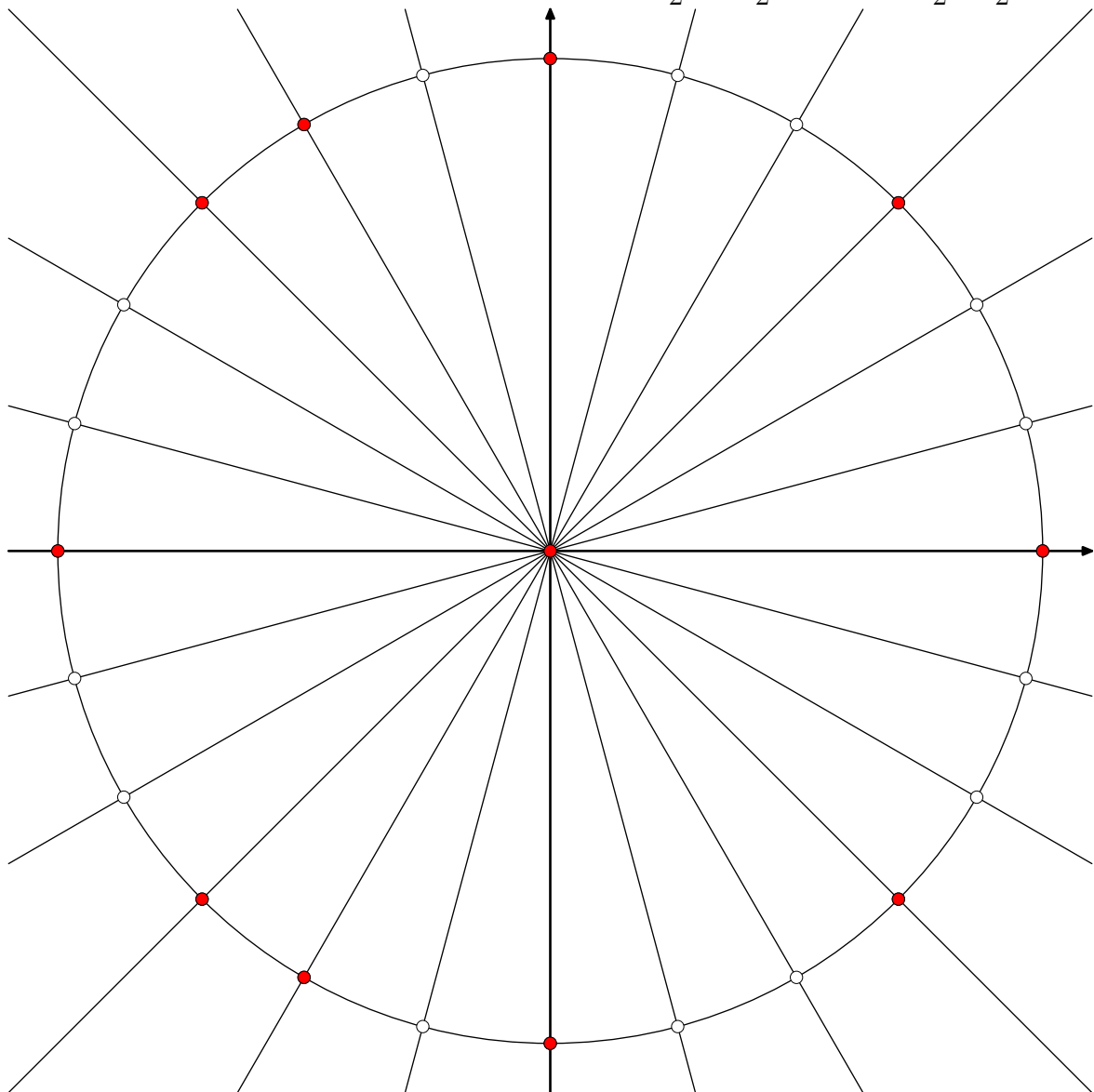
$$(z^3 - 1) \cdot (z^8 - 1) \cdot z^{16} = 0,$$

$$z^3 = 1 \quad \vee \quad z^8 = 1 \quad \vee \quad z = 0.$$

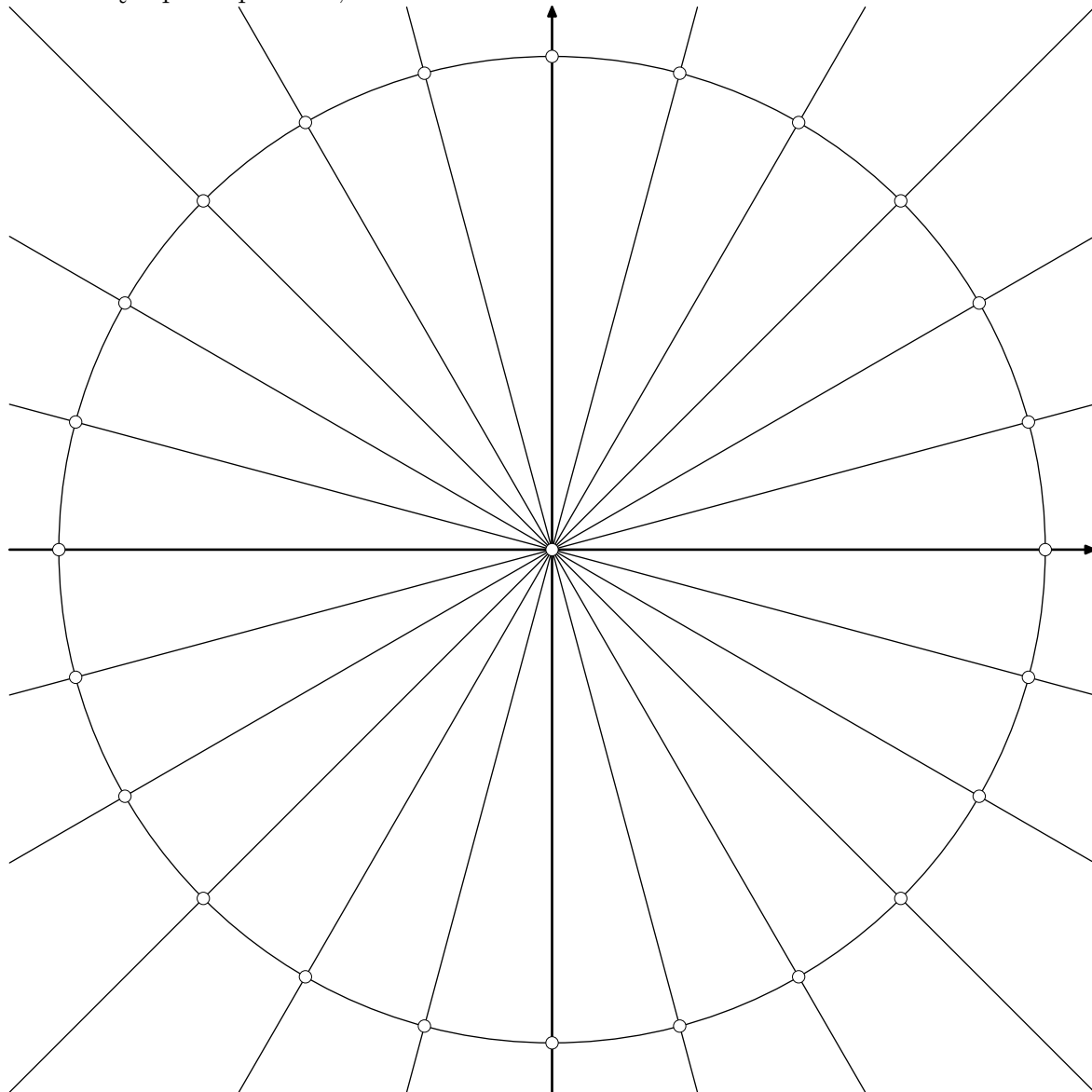
Zatem dane równanie ma 11 rozwiązań i są to: liczba 0, osiem pierwiastków ósmego stopnia z jedności (w tym liczba 1) oraz dwa pierwiastki trzeciego stopnia z jedności (bez liczby 1, którą już uwzględniliśmy).

Odpowiedź:

Dane równanie ma 11 rozwiązań: $0, \pm 1, \pm i, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm_2 \frac{\sqrt{2}}{2} i$ oraz $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.



424. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^3 = i$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .

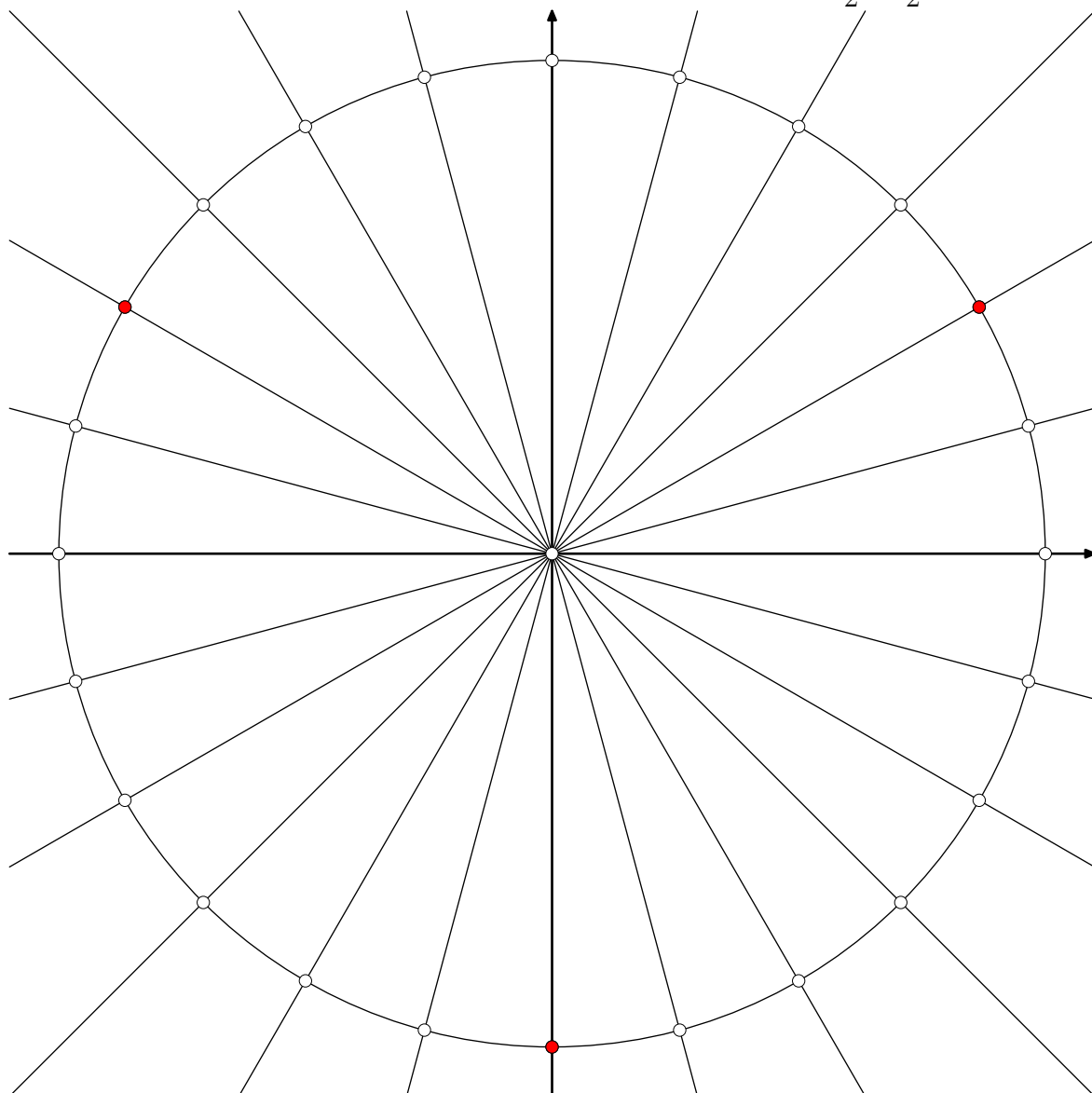


Rozwiązanie:

Dane w zadaniu równanie jest spełnione przez liczbę $z = -i$, a pozostałe dwa rozwiązania tego równania leżą na okręgu jednostkowym co 120° .

Inaczej: liczba i ma moduł 1 i argument $\pi/2$, a zatem jej pierwiastki sześciennne mają moduł 1 i argumenty $\pi/6 + 2k\pi/3$ dla $k = 0, 1, 2$, czyli odpowiednio $\pi/6$, $5\pi/6$, $3\pi/2$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 3 rozwiązania: $-i$ oraz $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.



425. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{2\pi} \cos^6 x \, dx$.

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \cos^6 x &= \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^6 = \frac{z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15z^{-2} + 6z^{-4} + z^{-6}}{64} = \\ &= \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3 \cos 4x}{16} + \frac{15 \cos 2x}{32} + \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Pamiętając, że całka oznaczona z cosinusa po pełnym okresie jest równa 0, otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3 \cos 4x}{16} + \frac{15 \cos 2x}{32} + \frac{5}{16} \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{5}{16} \, dx = 2\pi \cdot \frac{5}{16} = \frac{5\pi}{8}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{5\pi}{8}$.

426. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\pi} \sin^{2016} x - \cos^{2016} x \, dx$.

Rozwiązanie:

Z równości

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

oraz

$$|\sin(x + \pi)| = |\sin x|$$

otrzymujemy

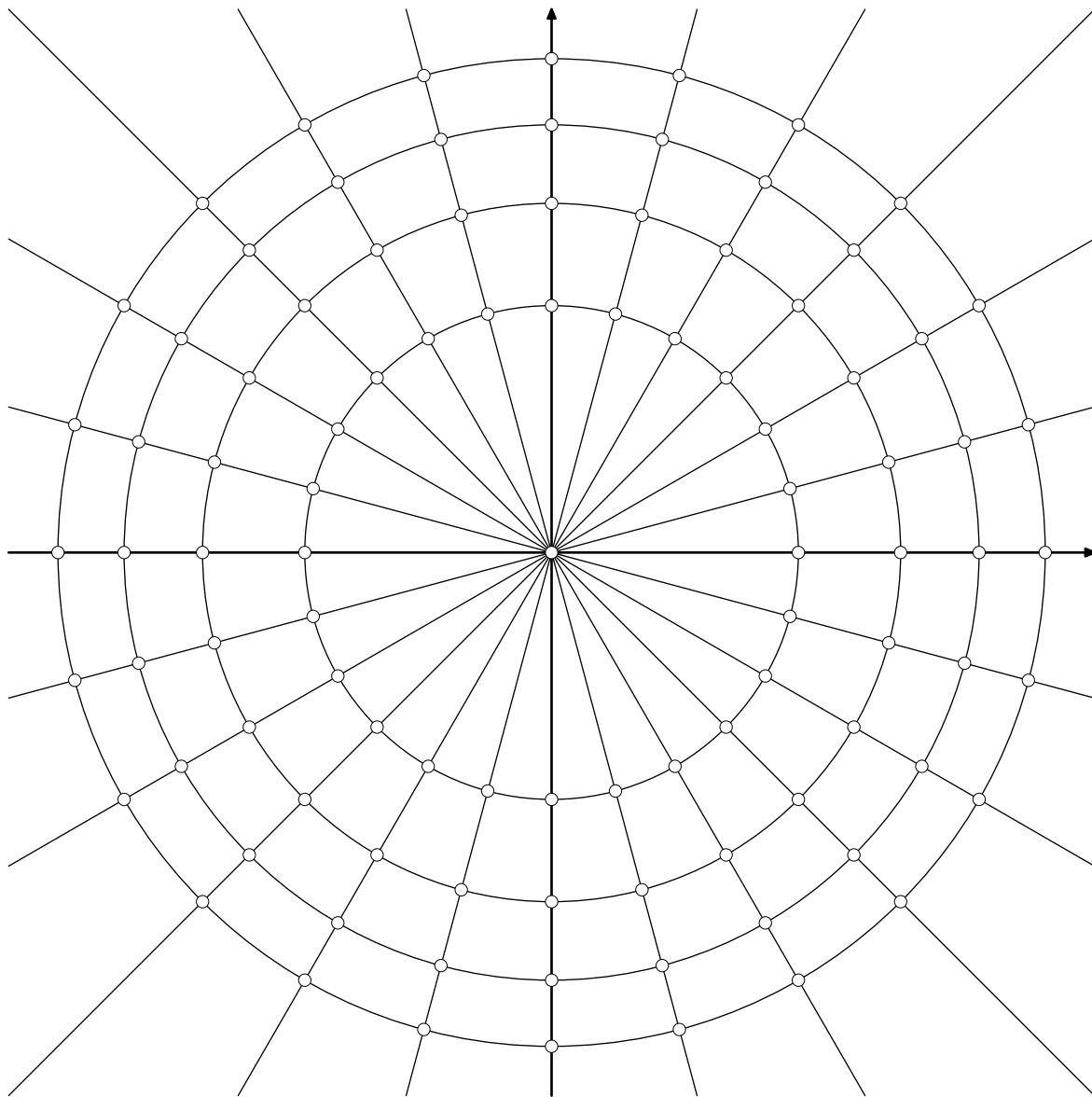
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^{2016} x \, dx &= \int_0^{\pi} \sin^{2016} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2016} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2016} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \, dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2016} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2016} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \, dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2016} x \, dx + \int_0^{\pi/2} \sin^{2016} x \, dx = \\ &= \int_0^{\pi} \sin^{2016} x \, dx, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dana w zadaniu całka ma wartość zero.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka oznaczona ma wartość 0.

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: Funkcje $\sin^{2016}$ i $\cos^{2016}$ są całkowane po pełnym okresie równym π , a przy tym jest to ta sama funkcja, tylko przesunięta o $\pi/2$.

427. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = -4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



Rozwiązanie:

Liczba zespolona -4 ma moduł 4 i argument π , w związku z czym jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, a jeden z nich ma argument $\pi/4$. Tym pierwiastkiem jest więc $\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i$. Pozostałe trzy rozwiązania danego w zadaniu równania leżą na okręgu o promieniu $\sqrt{2}$ co 90° .

Inaczej: liczba -4 ma moduł 4 i argument π , a zatem jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt{2}$ i argumenty $\pi/4 + k\pi/2$ dla $k=0,1,2,3$, czyli odpowiednio $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 4 rozwiązania: $\pm_1 1 \pm_2 i$.

