

Egzamin, **8.02.2018**, godz. 9:00-13:20Zadanie **11.** (10 punktów)

W każdym z zadań **11.1-11.10** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określiś ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy, ale nie określiś poprawnie ich przynależności do zbioru, otrzymasz **0,5 punktu**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

**Łączna liczba punktów zostanie zaokrąglona w górę do liczby całkowitej.**

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

**11.1.**  $A = \{x^4 : x \in (-2, 1)\}$

Ocena .....

$\inf A = \mathbf{0}$

$\sup A = \mathbf{16}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **NIE**

**11.2.**  $B = \{x^5 : x \in (-2, 1)\}$

Ocena .....

$\inf B = \mathbf{-32}$

$\sup B = \mathbf{1}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **NIE**

**11.3.**  $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf C = \mathbf{-1}$

$\sup C = \mathbf{1/10}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **TAK**

**11.4.**  $D = \left\{ \frac{1}{n^3 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf D = \mathbf{-1/18}$

$\sup D = \mathbf{1}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **TAK**

$$11.5. E = \{(2 - \sqrt{3})^n : n \in \mathbb{N}\}$$

Ocena .....

$$\inf E = 0$$

$$\sup E = 2 - \sqrt{3}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **TAK**

$$11.6. F = \{(2 - \sqrt{5})^n : n \in \mathbb{N}\}$$

Ocena .....

$$\inf F = 2 - \sqrt{5}$$

$$\sup F = (2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $F$  **TAK** Czy kres górny należy do zbioru  $F$  **TAK**

$$11.7. G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$$

Ocena .....

$$\inf G = 5$$

$$\sup G = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $G$  **TAK** Czy kres górny należy do zbioru  $G$  **NIE**

$$11.8. H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$$

Ocena .....

$$\inf H = \sqrt[3]{25}$$

$$\sup H = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $H$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $H$  **TAK**

$$11.9. I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25^n \leq 3^m \leq 27^n \right\}$$

Ocena .....

$$\inf I = \log_3 25 = 2\log_3 5$$

$$\sup I = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $I$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $I$  **TAK**

$$11.10. J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25^n \leq 5^m \leq 27^n \right\}$$

Ocena .....

$$\inf J = 2$$

$$\sup J = \log_5 27 = 3\log_5 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $J$  **TAK** Czy kres górny należy do zbioru  $J$  **NIE**

**Zadanie 12. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba  $\log_{300} 3000$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\log_{300} 3000$  jest wymierna i niech  $m/n$  będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{300} 3000 &= \frac{m}{n}, \\ 300^{m/n} &= 3000, \\ 300^m &= 3000^n.\end{aligned}\tag{1}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $m, n$ .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m} \cdot 3^m \cdot 5^{2m} = 2^{3n} \cdot 3^n \cdot 5^{3n}.\tag{2}$$

**Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:**

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ m = n \\ 2m = 3n \end{cases}\tag{3}$$

Jednak układ równań (3) nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich  $m, n$ , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m = 3n > 2n = 2m,$$

czyli  $2m > 2m$ , co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste  $m = n = 0$  nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba  $\log_{300} 3000$  jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba  $\log_{300} 3000$  jest niewymierna.

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- dojście do równania (1) – **2 punkty**
- dojście do równania (2) – **2 punkty**
- powołanie się na twierdzenie o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze – **1 punkt**
- dojście do układu równań (3) – **2 punkty**
- wykazanie, że układ (3) nie ma rozwiązań – **2 punkty**
- poprawność i przejrzystość ogólnej redakcji rozwiązania – **1 punkt**
- niepoprawne rozwiązania oparte o równość  $10^{2m} \cdot 3^m = 10^{3n} \cdot 3^n$  (bez rozkładu na czynniki pierwsze) mogą uzyskać maksymalnie **3 punkty** za całe rozwiązanie

**Zadanie 13. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n+28} - \sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75} - \sqrt{25n+11}} \leq 2C.$$

*Rozwiązanie:*

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

prawdziwy w przypadku  $a + b \neq 0$ , otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{36n+28} - \sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75} - \sqrt{25n+11}} = \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})}. \quad (4)$$

Szacowanie od dołu (licznika od dołu i mianownika od góry) prowadzi do:

$$\begin{aligned} \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})} &\geq \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+0} + \sqrt{25n+0})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28n} + \sqrt{36n+13n})} = \\ &= \frac{15 \cdot 10 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot (\sqrt{64n} + \sqrt{49n})} = \frac{150 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot 15 \cdot \sqrt{n}} = \frac{5}{32} = C. \end{aligned} \quad (5)$$

Szacowanie od góry (licznika od góry i mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\begin{aligned} \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})} &\leq \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75n} + \sqrt{25n+11n})}{64 \cdot (\sqrt{36n+0} + \sqrt{36n+0})} = \\ &= \frac{15 \cdot (\sqrt{100n} + \sqrt{36n})}{64 \cdot 12 \cdot \sqrt{n}} = \frac{15 \cdot 16 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot 12 \cdot \sqrt{n}} = \frac{5}{16} = 2C. \end{aligned} \quad (6)$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą  $C = 5/32$ .

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- dojście do wyrażenia (4) – **3 punkty**
- oszacowanie (5) – **3 punkty**
- oszacowanie (6) – **3 punkty**
- wskazanie stałej  $C$  (pod warunkiem poprawności obu oszacowań) – **1 punkt**

**Zadanie 14. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8.$$

*Rozwiązanie:*

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założmy, że  $a_n = cq^{n-1}$ , pamiętając, aby  $c > 0$  oraz  $0 < q < 1$ . Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q} \quad (7)$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 (q^2)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}, \quad (8)$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = 4 \\ \frac{c^2}{1-q^2} = 8, \end{cases} \quad (9)$$

czyli

$$\begin{cases} c = 4(1-q) \\ c^2 = 8(1-q^2). \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c = 2 + 2q,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$2 + 2q = 4 - 4q,$$

$$6q = 2,$$

$$q = \frac{1}{3},$$

skąd

$$c = 2 + 2q = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Otrzymane rozwiązanie  $q = 1/3$ ,  $c = 8/3$  prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{8}{3^n}.$$

**Odpowiedź:** Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{3^n}.$$

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- dojście do wzorów (7) i (8) – **1+2=3 punkty**
- zapisanie układu równań (9) – **1 punkt**
- rozwiązanie układu równań (9) – **5 punktów**
- zapisanie przykładu (wzór szeregu lub jego wyrazu ogólnego) – **1 punkt**

**Zadanie 15. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x - 1 - x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

*Rozwiązanie:*

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2h} - 2e^h + 1}{e^h - 1 - h} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 2e^h + 1 - Ae^h + A + Ah}{he^h - h - h^2}. \quad (10)$$

Przy  $h \rightarrow 0$  w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{2h} - 2e^h - Ae^h + A}{e^h + he^h - 1 - 2h}. \quad (11)$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4e^{2h} - 2e^h - Ae^h}{2e^h + he^h - 2}. \quad (12)$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy iloraz  $\frac{2-A}{0}$ , co ma postać nieoznaczoną  $\frac{0}{0}$  dla  $A = 2$ . Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8e^{2h} - 4e^h}{3e^h + he^h} = \frac{4}{3}. \quad (13)$$

**Odpowiedź:** Funkcja  $f$  jest różniczkowalna dla  $A = 2$  i wówczas  $f'(0) = 4/3$ .

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- dojście do (10) – **2 punkty**
- dojście do (11) – **2 punkty**
- dojście do (12) – **2 punkty**
- wskazanie wartości  $A$  – **2 punkty**
- dojście do (13) – **2 punkty**

**Zadanie 16. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych  $A > 0$  i  $B > 2$ , aby zadanie miało sens.*Rozwiązanie:*

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+2 \cdot \frac{2An+A^2}{2}}}{n^2+4n+4+2(B-2)n+B^2-4} = \\ = \frac{\sqrt{n^2+2 \cdot \frac{2An+A^2}{2}}}{(n+2)^2+2(B-2)n+B^2-4},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k}, \quad (14)$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{2} = 2(B-2)n+B^2-4, \quad (15)$$

i w konsekwencji ma  $N(n)+1$  składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego  $n$  obie wartości  $N(n)$  określone równaniami (15) muszą być równe i całkowite.W celu znalezienia takich  $A$  i  $B$ , aby prawe równanie (15) było spełnione dla każdej liczby naturalnej  $n$ , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2An+A^2 = 2 \cdot (2(B-2)n+B^2-4), \\ 2An+A^2 = 4(B-2)n+2B^2-8. \quad (16)$$

Aby równość (16) zachodziła dla każdej liczby naturalnej  $n$ , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2A &= 4(B-2) \\ A^2 &= 2B^2-8 \end{cases} \\ \begin{cases} A &= 2(B-2) \\ A^2 &= 2(B-2)(B+2) \end{cases} \quad (17)$$

Dzieląc drugie równanie układu (17) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami  $A > 0$  i  $B > 2$  obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy  $A = B+2$ , co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$B+2 = 2B-4,$$

skąd  $B = 6$  i  $A = 8$ . Wstawiając te wartości do równości (15) otrzymujemy

$$N(n) = 8n+32.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma  $8n+33$  składniki.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (14) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(8n+33) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} \leq \sum_{k=0}^{8n+32} \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} \leq (8n+33) \cdot \frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+2)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy  $n \rightarrow +\infty$ .

Otrzymujemy

$$(8n+33) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} = \frac{(8n+33) \cdot n}{(n+6)^2} = \frac{8 + \frac{33}{n}}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^2} \rightarrow 8$$

oraz

$$(8n+33) \cdot \frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+2)^2} = \frac{(8n+33) \cdot (n+8)}{(n+2)^2} = \frac{\left(8 + \frac{33}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{8}{n}\right)}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} \rightarrow 8.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 8.

**Odpowiedź:** Zadanie ma sens dla  $A=8$ ,  $B=6$  i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 8.

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- dojście do równania (15) – **3 punkty**
- wyznaczenie  $A$  i  $B$  – **2 punkty**
- oszacowania i wyliczenie granicy na podstawie twierdzenia o trzech ciągach – **5 punktów**

- za błędną liczbę składników sumy odejmujemy:

**1 punkt** – gdy podano liczbę składników  $8n+32$

**co najmniej 2 punkty** – gdy podano inną błędną liczbę składników



**Zadanie 21. (10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale  $[-11, 9]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4} = 2x + \sqrt{(x^2 - 49)^2} = 2x + |x^2 - 49|, \quad (18)$$

a zatem wzór na funkcję  $f$  możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 - 49 & \text{dla } x \in [-11, -7] \cup [7, 9] \\ 2x - x^2 + 49 & \text{dla } x \in (-7, 7) \end{cases} \quad (19)$$

W konsekwencji pochodna funkcji  $f$  wewnątrz przedziału  $[-11, 9]$  jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{dla } x \in (-11, -7) \cup (7, 9) \\ 2 - 2x & \text{dla } x \in (-7, 7) \end{cases} \quad (20)$$

W punktach  $\pm 7$  pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji  $f$ .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku  $x \in (-11, -7) \cup (7, 9)$  równanie  $f'(x) = 0$  sprowadza się do  $2 + 2x = 0$ , co ma rozwiązanie  $x = -1$ , które **nie należy** do rozważanego zbioru  $(-11, -7) \cup (7, 9)$ .

2° W przypadku  $x \in (-7, 7)$  równanie  $f'(x) = 0$  sprowadza się do  $2 - 2x = 0$ , co ma rozwiązanie  $x = 1$ , które **należy** do rozważanego przedziału  $(-7, 7)$ .

Porównamy wartości funkcji  $f$  w pięciu punktach:

- końce przedziału:  $-11$  i  $9$ ,
- miejsce zerowe pochodnej:  $1$ ,
- punkty, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje:  $-7$  i  $7$ .

$$f(-11) = 50,$$

$$f(-7) = -14,$$

$$f(1) = 50,$$

$$f(7) = 14,$$

$$f(9) = 50.$$

**Odpowiedź:** Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą  $-14$  w punkcie  $-7$ , a wartość największą równą  $50$  w punktach  $-11$ ,  $1$  i  $9$ .

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- dojście do wzoru (18) – **1 punkt**
- dojście do wzoru (19) – **1 punkt**
- dojście do wzoru (20) – **1 punkt**

- wyznaczenie punktu  $-1$  i stwierdzenie, że nie jest on miejscem zerowym pochodnej – **1 punkt**
- stwierdzenie, że  $1$  jest miejscem zerowym pochodnej – **1 punkt**
- wskazanie pięciu punktów, w których należy porównać wartości funkcji – **4 punkty**
- wyliczenie i porównanie wartości funkcji w pięciu punktach oraz sformułowanie odpowiedzi – **1 punkt**
- za brak świadomości, że  $\sqrt{x^2} = |x|$ , a nie  $\sqrt{x^2} = x$  – całkowita dyskwalifikacja rozwiązania, czyli **0 punktów** za całe rozwiązanie
- za brak świadomości, że należy sprawdzić wartości funkcji w punktach podejrzanych o nieróżniczkowalność – częściowa dyskwalifikacja rozwiązania, czyli **maksymalnie 3 punkty** za całe rozwiązanie (3 punkty tylko przy założeniu poprawności pozostałych elementów rozwiązania)
- za brak świadomości, że należy sprawdzić wartości funkcji na końcach przedziału – częściowa dyskwalifikacja rozwiązania, czyli **maksymalnie 3 punkty** za całe rozwiązanie (3 punkty tylko przy założeniu poprawności pozostałych elementów rozwiązania)

**Zadanie 22. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla  $n = 1$  mamy

$$L = \binom{2}{1} = 2$$

oraz

$$P = \frac{2^1}{\sqrt{1}} = 2.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać  $2 \geq 2$ , jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz  $n$  będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}. \quad (21)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}. \quad (22)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności (21) można zapisać jako

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności (22) i korzystając z założenia indukcyjnego (21) otrzymujemy

$$\begin{aligned} L = \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+1)} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq \\ &\geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}. \quad (23)$$

Nierówność (23) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} &\geq 2, \\ 2n+1 &\geq 2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}, \\ (2n+1)^2 &\geq 4 \cdot n \cdot (n+1), \end{aligned}$$

$$4n^2 + 4n + 1 \geq 4n^2 + 4n,$$

$$1 \geq 0,$$

a zatem nierówność (23) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  z nierówności (21) wynika nierówność (22).

**3°** Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- zapisanie nierówności (22) – **1 punkt**
- dojście do nierówności (23) – **5 punktów**
- wykazanie prawdziwości nierówności (23) – **3 punkty**
- wskazanie indukcji jako metody rozwiązania i ogólna redakcja dowodu indukcyjnego (w tym sprawdzenie dla  $n = 1$ ) – **1 punkt**

**Zadanie 23. (10 punktów)**

Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia  $W(x)$  o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ W(x) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

*Rozwiązanie:*

Niech

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g.$$

Aby funkcja  $f$  była dwukrotnie różniczkowalna w zerze, muszą zachodzić warunki

$$W(0) = W'(0) = W''(0) = 0, \quad (24)$$

skąd

$$d = e = g = 0 \quad (25)$$

i w konsekwencji

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji  $f$  w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1) = W'(1) = 1 \quad \text{oraz} \quad W''(1) = 0, \quad (26)$$

co wobec

$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2$$

oraz

$$W''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a + b + c & = 1 \\ 5a + 4b + 3c & = 1 \\ 20a + 12b + 6c & = 0 \end{cases} \quad (27)$$

który ma rozwiązanie  $a = 3$ ,  $b = -8$ ,  $c = 6$ .

**Odpowiedź:** Wielomianem spełniającym warunki zadania jest  $W(x) = 3x^5 - 8x^4 + 6x^3$ .

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- zapisanie równości (24) – **1 punkt**
- wywnioskowanie (25) – **1 punkt**
- zapisanie równości (26) – **2 punkty**
- dojście do układu równań (27) – **4 punkty**
- rozwiązanie układu równań (27) i zapisanie wielomianu – **2 punkty**

**Zadanie 24. (10 punktów)**

Dana jest funkcja  $f : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem  $f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}$ . Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [-10, 10]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

*Rozwiązanie:*

Dla  $x = y$  dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy  $x \neq y$  z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie  $c$  jest pewną liczbą leżącą między  $x$  i  $y$ . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x \in [-10, 10]$  zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 1. \quad (28)$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością  $|x| \leq 10$  prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{10x}{\sqrt{10x^2 + 9000}} \right| = \frac{10 \cdot |x|}{\sqrt{10x^2 + 9000}} = \frac{10}{\sqrt{10 + \frac{9000}{x^2}}} \leq \frac{10}{\sqrt{10 + \frac{9000}{10^2}}} = \frac{10}{\sqrt{10 + 90}} = \frac{10}{10} = 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- skorzystanie z twierdzenia Lagrange'a – **1 punkt**
- wykazanie świadomości, że zadanie sprowadza się do nierówności (28) – **1 punkt**
- obliczenie pochodnej funkcji  $f$  – **1 punkt**
- poprawne udowodnienie nierówności (28) – **7 punktów**
- przy błędnym udowodnieniu nierówności (28) poprzez sprawdzenie wartości  $f'(10)$  bez uzasadnienia, że jest to największa wartość funkcji  $f'$  – **maksymalnie 4 punkty** za całe rozwiązanie

**Zadanie 25. (10 punktów)**

Niech funkcja  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89) + f(91) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(90) ?$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując dwukrotnie funkcję  $f$  otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3 \cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność  $f''(x) < 0$  jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}} < 0,$$

$$\frac{2}{9 \cdot x^{5/3}} < \frac{1}{x^2},$$

$$x^{1/3} < \frac{9}{2},$$

$$x < \frac{9^3}{2^3} = \frac{729}{8} = 91,125.$$

Zatem  $f$  jest ściśle wklęsła w przedziale  $(0; 91,125)$ , skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{29}$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x, y < 91,125$ .

W szczególności

$$f(89) + f(91) < 2 \cdot f(90).$$

**Uwaga:** Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$f(89) + f(91) \approx 0,036809335389$$

oraz

$$2 \cdot f(90) \approx 0,036809847546,$$

co wydaje się skutecznie odbierać wszelką nadzieję na rozwiązanie zadania poprzez bezpośrednie szacowanie każdej z podanych liczb z osobna.

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- obliczenie  $f'$  – **1 punkt**
- obliczenie  $f''$  – **1 punkt**
- rozwiązanie nierówności  $f''(x) < 0$  i wyznaczenie przedziału wklęsłości funkcji  $f$  – **4 punkty**
- powiązanie wklęsłości z nierównością (29) – **2 punkty**
- wywnioskowanie z nierówności (29) poprawnej odpowiedzi na pytanie z treści zadania – **2 punkty**

**Zadanie 26. (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)}.$$

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy wyrażenie pod znakiem sumy na ułamki proste, czyli szukamy takich liczb  $A$ ,  $B$  i  $C$ , że

$$\frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+3}. \quad (30)$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez  $n \cdot (n+1) \cdot (n+3)$  otrzymujemy

$$1 = A \cdot (n+1) \cdot (n+3) + B \cdot n \cdot (n+3) + C \cdot n \cdot (n+1).$$

Dla  $n=0$  otrzymujemy  $A=1/3$ , dla  $n=-1$  dostajemy  $B=-1/2$ , natomiast przyjęcie  $n=-3$  daje  $C=1/6$ . Można też ułożyć układ równań na współczynniki i go rozwiązać.

Zatem  $N$ -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1/3}{n} - \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/6}{n+3} \right) = \\ &= \left( \frac{1/3}{1} - \frac{1/2}{2} + \frac{1/6}{4} \right) + \left( \frac{1/3}{2} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/6}{5} \right) + \left( \frac{1/3}{3} - \frac{1/2}{4} + \frac{1/6}{6} \right) + \left( \frac{1/3}{4} - \frac{1/2}{5} + \frac{1/6}{7} \right) + \dots \\ &\dots + \left( \frac{1/3}{N-2} - \frac{1/2}{N-1} + \frac{1/6}{N+1} \right) + \left( \frac{1/3}{N-1} - \frac{1/2}{N} + \frac{1/6}{N+2} \right) + \left( \frac{1/3}{N} - \frac{1/2}{N+1} + \frac{1/6}{N+3} \right) = \\ &= \frac{1/3}{1} - \frac{1/6}{2} - \frac{1/6}{3} - \frac{1/3}{N+1} + \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/6}{N+3} = \frac{7}{36} - \frac{1/3}{N+1} + \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/6}{N+3}, \end{aligned}$$

co przy  $N$  dążącym do  $+\infty$  zbiega do  $7/36$ .

**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg ma sumę równą  $7/36$ .

**Punktacja standardowych rozwiązań:**

- zapisanie równości (30) – **1 punkt**
- wyznaczenie  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – **3 punkty**
- wyprowadzenie wzoru na sumę częściową szeregu – **5 punktów**
- przejście graniczne i wskazanie sumy szeregu – **1 punkt**
- błędne rozwiązanie oparte na odejmowaniu szeregów rozbieżnych lub upraszczaniu wyrazów w nieskończonym szeregu może otrzymać **maksymalnie 5 punktów** za całe rozwiązanie



**Zadanie 31. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} < \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+2}.$$

*Rozwiązanie:*

Daną w zadaniu nierówność przepisujemy w postaci równoważnej

$$(n+1)^{3n+2} < n^{2n} \cdot (n+3)^{n+2}$$

i mnożymy obustronnie przez  $n^4$ , otrzymując po przekształceniach kolejne nierówności równoważne:

$$n^4 \cdot (n+1)^{3n+2} < n^{2n+4} \cdot (n+3)^{n+2},$$

$$(n^3 + n^2)^2 \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)^n < (n^3 + 3n^2)^{n+2}.$$

Po każdej ze stron ostatniej nierówności występuje  $n+2$  czynników, przy czym suma czynników po stronie lewej jest równa  $n^4 + 5n^3 + 5n^2 + n$  i nie przekracza sumy czynników po prawej stronie równej  $n^4 + 5n^3 + 6n^2 = n^4 + 5n^3 + 5n^2 + n^2$ , a ponieważ czynniki w iloczynie po prawej stronie są równe, iloczyn ten ma większą wartość.

Skorzystaliśmy tu z przeformułowania nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, które mówi, że iloczyn ustalonej liczby czynników nieujemnych o ustalonej sumie jest największy, gdy wszystkie jego czynniki są równe.

**Zadanie 32. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5}^n \frac{\binom{k}{5}}{\binom{\binom{n}{2}+k}{3} + k^5}.$$

*Rozwiązanie:*

Oszacowanie mianownika od dołu daje

$$\binom{\binom{n}{2}+k}{3} + k^5 > \binom{\binom{n}{2}}{3} = \frac{\frac{n^2-n}{2} \cdot \frac{n^2-n-2}{2} \cdot \frac{n^2-n-4}{2}}{6} = \frac{(n^2-n) \cdot (n^2-n-2) \cdot (n^2-n-4)}{48},$$

a oszacowanie od góry prowadzi do

$$\begin{aligned} \binom{\binom{n}{2}+k}{3} + k^5 &\leq \binom{\binom{n}{2}+n}{3} + n^5 = \frac{\frac{n^2+n}{2} \cdot \frac{n^2+n-2}{2} \cdot \frac{n^2+n-4}{2}}{6} + n^5 = \\ &= \frac{(n^2+n) \cdot (n^2+n-2) \cdot (n^2+n-4)}{48} + n^5. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\sum_{k=5}^n \binom{k}{5} = \binom{n+1}{6} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{720}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^n \frac{\binom{k}{5}}{\binom{\binom{n}{2}+k}{3} + k^5} &< \sum_{k=5}^n \frac{\binom{k}{5}}{\frac{(n^2-n) \cdot (n^2-n-2) \cdot (n^2-n-4)}{48}} = \frac{\sum_{k=5}^n \binom{k}{5}}{\frac{(n^2-n) \cdot (n^2-n-2) \cdot (n^2-n-4)}{48}} = \\ &= \frac{\binom{n+1}{6}}{\frac{(n^2-n) \cdot (n^2-n-2) \cdot (n^2-n-4)}{48}} = \frac{\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{720}}{\frac{(n^2-n) \cdot (n^2-n-2) \cdot (n^2-n-4)}{48}} \rightarrow \frac{48}{720} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^n \frac{\binom{k}{5}}{\binom{\binom{n}{2}+k}{3} + k^5} &\geq \sum_{k=5}^n \frac{\binom{k}{5}}{\frac{(n^2+n) \cdot (n^2+n-2) \cdot (n^2+n-4)}{48} + n^5} = \frac{\sum_{k=5}^n \binom{k}{5}}{\frac{(n^2+n) \cdot (n^2+n-2) \cdot (n^2+n-4)}{48} + n^5} = \\ &= \frac{\binom{n+1}{6}}{\frac{(n^2+n) \cdot (n^2+n-2) \cdot (n^2+n-4)}{48} + n^5} = \frac{\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{720}}{\frac{(n^2+n) \cdot (n^2+n-2) \cdot (n^2+n-4)}{48} + 48n^5} \rightarrow \frac{48}{720} = \frac{1}{15}, \end{aligned}$$

skąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica jest równa  $1/15$ .

**Zadanie 33. (10 punktów)**

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres dolny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{a^2 + b^4 + c^6 + d^{12}}{abcd} : a, b, c, d \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Rozwiązanie:*

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do następujących dwunastu liczb:

$$6 \text{ liczb } a^2/6, \quad 3 \text{ liczby } b^4/3, \quad 2 \text{ liczby } c^6/2, \quad 1 \text{ liczba } d^{12},$$

otrzymujemy

$$\sqrt[12]{\frac{a^{12}b^{12}c^{12}d^{12}}{6^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2}} \leq \frac{a^2 + b^4 + c^6 + d^{12}}{12},$$

czyli

$$\frac{a^2 + b^4 + c^6 + d^{12}}{abcd} \geq \frac{12}{\sqrt[12]{6^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2}} = \frac{12}{\sqrt[12]{2^8 \cdot 3^9}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}.$$

Zatem liczba  $2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$  jest ograniczeniem dolnym zbioru  $Z$ . Wykażemy, że jest to ograniczenie największe. W tym celu rozważmy następujące ciągi liczb:

$$d_n = 10^n, \quad c_n = \left[ \sqrt[6]{2} \cdot 10^{2n} \right], \quad b_n = \left[ \sqrt[4]{3} \cdot 10^{3n} \right], \quad a_n = \left[ \sqrt{6} \cdot 10^{6n} \right].$$

To prowadzi do następującego ciągu elementów zbioru  $Z$ :

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2 + b_n^4 + c_n^6 + d_n^{12}}{a_n b_n c_n d_n} &= \frac{\left(\frac{a_n}{10^{6n}}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{10^{3n}}\right)^4 + \left(\frac{c_n}{10^{2n}}\right)^6 + \left(\frac{d_n}{10^n}\right)^{12}}{\frac{a_n}{10^{6n}} \cdot \frac{b_n}{10^{3n}} \cdot \frac{c_n}{10^{2n}} \cdot \frac{d_n}{10^n}} \rightarrow \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt[4]{3})^4 + (\sqrt[6]{2})^6 + 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot 1} = \\ &= \frac{6 + 3 + 2 + 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{2}} = \frac{12}{2^{2/3} \cdot 3^{3/4}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}. \end{aligned}$$

*Odpowiedź:* Kres dolny zbioru  $Z$  jest równy  $2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$ .

**Zadanie 34. (10 punktów)**

Dana jest taka funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla każdych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt[4]{\sqrt{(x-y)^6 + 1} - 1}.$$

Udowodnić, że  $f$  jest funkcją stałą.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $t$  zachodzą nierówności

$$\sqrt[4]{\sqrt{t^6 + 1} - 1} \leq \sqrt[4]{\sqrt{\frac{t^{12}}{4} + t^6 + 1} - 1} = \sqrt[4]{\sqrt{\left(\frac{t^6}{2} + 1\right)^2} - 1} = \sqrt[4]{\frac{t^6}{2}} = \frac{|t|^{3/2}}{\sqrt[4]{2}} \leq |t|^{3/2},$$

wobec czego z nierówności danej w treści zadania wynika nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{3/2}.$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x < y$  oraz dowolnej liczby naturalnej  $n$  oznaczmy

$$x_i = x + i \cdot \frac{y - x}{n}$$

dla  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ . Odnotujmy, że przy tych oznaczeniach  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$ , a ponadto  $x_i - x_{i-1} = (y - x)/n$ . Tak więc punkty  $x_i$  dzielą przedział  $[x, y]$  na  $n$  przedziałów równej długości.

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z założeń o funkcji  $f$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|^{3/2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{|x - y|^{3/2}}{n^{3/2}} = \frac{|x - y|^{3/2}}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy więc, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x < y$  oraz dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|^{3/2}}{\sqrt{n}},$$

co po ustaleniu  $x, y$  i przejściu z  $n$  do  $+\infty$  daje

$$|f(x) - f(y)| \leq 0,$$

wobec czego

$$|f(x) - f(y)| = 0$$

i w konsekwencji  $f$  jest funkcją stałą.

**Zadanie 35. (10 punktów)**

Wyznaczyć liczbę naturalną  $k$  oraz liczby wymierne  $a$  i  $b$ , dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej funkcji trzykrotnie różniczkowalnej  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o dodatniej pochodnej pierwszego rzędu, pochodna trzeciego rzędu funkcji  $f$  odwrotnej do  $g$  wyraża się wzorem:

$$f'''(g(x)) = \frac{a \cdot (g''(x))^2 + b \cdot g'(x) \cdot g'''(x)}{(g'(x))^k}.$$

*Rozwiązanie:*

Trzykrotne różniczkowanie stronami równości

$$f(g(x)) = x$$

prowadzi kolejno do

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1,$$

$$f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x) = 0,$$

$$f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + f''(g(x)) \cdot 2 \cdot g'(x) \cdot g''(x) + f''(g(x)) \cdot g''(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x) = 0,$$

$$f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3 \cdot f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g''(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x) = 0.$$

Wobec tego otrzymujemy następujące wzory na pochodne funkcji  $f$ :

$$f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)},$$

$$f''(g(x)) = -\frac{f'(g(x)) \cdot g''(x)}{(g'(x))^2} = -\frac{g''(x)}{(g'(x))^3},$$

$$\begin{aligned} f'''(g(x)) &= -\frac{3 \cdot f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g''(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x)}{(g'(x))^3} = \\ &= -\frac{3 \cdot \frac{-g''(x)}{(g'(x))^3} \cdot g'(x) \cdot g''(x) + \frac{1}{g'(x)} \cdot g'''(x)}{(g'(x))^3} = \frac{3 \cdot (g''(x))^2 - g'(x) \cdot g'''(x)}{(g'(x))^5}. \end{aligned}$$

W konsekwencji szukane liczby to  $k=5$ ,  $a=3$  i  $b=-1$ .

**Zadanie 36. (10 punktów)**

Przy każdym z poniższych 28 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

**P** - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

**F** - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

**N** - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie  $n$  poprawnych odpowiedzi otrzymasz  $\max(0, n - 18)$  punktów.

O zdaniu  $T(n)$  wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi implikacja  $T(n) \Rightarrow T(5n)$ ,
- dla każdej liczby naturalnej  $n > 13$  zachodzi implikacja  $T(n) \Rightarrow T(n - 13)$ ,
- implikacja  $T(11) \Rightarrow T(12)$  jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości implikacji:

a)  $T(130) \Rightarrow T(131)$  **N**

b)  $T(130) \Rightarrow T(132)$  **P**

c)  $T(130) \Rightarrow T(133)$  **P**

d)  $T(130) \Rightarrow T(134)$  **N**

e)  $T(130) \Rightarrow T(135)$  **N**

f)  $T(130) \Rightarrow T(136)$  **N**

g)  $T(130) \Rightarrow T(137)$  **N**

h)  $T(131) \Rightarrow T(132)$  **P**

i)  $T(131) \Rightarrow T(133)$  **P**

j)  $T(131) \Rightarrow T(134)$  **P**

k)  $T(131) \Rightarrow T(135)$  **P**

l)  $T(131) \Rightarrow T(136)$  **P**

m)  $T(131) \Rightarrow T(137)$  **P**

n)  $T(132) \Rightarrow T(133)$  **P**

o)  $T(132) \Rightarrow T(134)$  **N**

p)  $T(132) \Rightarrow T(135)$  **F**

q)  $T(132) \Rightarrow T(136)$  **N**

r)  $T(132) \Rightarrow T(137)$  **N**

s)  $T(133) \Rightarrow T(134)$  **N**

t)  $T(133) \Rightarrow T(135)$  **F**

u)  $T(133) \Rightarrow T(136)$  **N**

v)  $T(133) \Rightarrow T(137)$  **N**

w)  $T(134) \Rightarrow T(135)$  **N**

x)  $T(134) \Rightarrow T(136)$  **P**

y)  $T(134) \Rightarrow T(137)$  **P**

z)  $T(135) \Rightarrow T(136)$  **P**

ż)  $T(135) \Rightarrow T(137)$  **P**

Ź)  $T(136) \Rightarrow T(137)$  **P**