

**Egzamin, 8.02.2018, godz. 9:00-13:20****Zadanie 11. (10 punktów)**

W każdym z zadań **11.1-11.10** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy, ale nie określisz poprawnie ich przynależności do zbioru, otrzymasz **0,5 punktu**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

**Łączna liczba punktów zostanie zaokrąglona w górę do liczby całkowitej.**

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

**11.1.**  $A = \{x^4 : x \in (-2, 1)\}$

Ocena .....

$\inf A = \dots\dots\dots$   $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $A$  .....

**11.2.**  $B = \{x^5 : x \in (-2, 1)\}$

Ocena .....

$\inf B = \dots\dots\dots$   $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $B$  .....

**11.3.**  $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf C = \dots\dots\dots$   $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $C$  .....

**11.4.**  $D = \left\{ \frac{1}{n^3 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena .....

$\inf D = \dots\dots\dots$   $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $D$  .....

---

**11.5.**  $E = \{(2 - \sqrt{3})^n : n \in \mathbb{N}\}$  Ocena .....

$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $E$  .....

---

**11.6.**  $F = \{(2 - \sqrt{5})^n : n \in \mathbb{N}\}$  Ocena .....

$\inf F = \dots\dots\dots \sup F = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $F$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $F$  .....

---

**11.7.**  $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$  Ocena .....

$\inf G = \dots\dots\dots \sup G = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $G$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $G$  .....

---

**11.8.**  $H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$  Ocena .....

$\inf H = \dots\dots\dots \sup H = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $H$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $H$  .....

---

**11.9.**  $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25^n \leq 3^m \leq 27^n \right\}$  Ocena .....

$\inf I = \dots\dots\dots \sup I = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $I$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $I$  .....

---

**11.10.**  $J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25^n \leq 5^m \leq 27^n \right\}$  Ocena .....

$\inf J = \dots\dots\dots \sup J = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $J$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $J$  .....

---

**Zadanie 12. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba  $\log_{300} 3000$  jest niewymierna.

**Zadanie 13. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n+28} - \sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75} - \sqrt{25n+11}} \leq 2C.$$

**Zadanie 14. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8.$$

**Zadanie 15. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x - 1 - x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

**Zadanie 16. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych  $A > 0$  i  $B > 2$ , aby zadanie miało sens.

**Zadanie 21. (10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale  $[-11, 9]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

**Zadanie 22. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$

**Zadanie 23. (10 punktów)**

Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia  $W(x)$  o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ W(x) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

**Zadanie 24. (10 punktów)**

Dana jest funkcja  $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem  $f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}$ . Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [-10, 10]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

**Zadanie 25. (10 punktów)**

Niech funkcja  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89) + f(91) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(90) ?$$

**Zadanie 26. (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)}.$$

**Zadanie 31. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} < \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+2}.$$

**Zadanie 32. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5}^n \frac{\binom{k}{5}}{\binom{\binom{n}{2}+k}{3} + k^5}.$$

**Zadanie 33. (10 punktów)**

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres dolny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{a^2 + b^4 + c^6 + d^{12}}{abcd} : a, b, c, d \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Zadanie 34. (10 punktów)**

Dana jest taka funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla każdych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt[4]{\sqrt{(x-y)^6 + 1} - 1}.$$

Udowodnić, że  $f$  jest funkcją stałą.

**Zadanie 35. (10 punktów)**

Wyznaczyć liczbę naturalną  $k$  oraz liczby wymierne  $a$  i  $b$ , dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej funkcji trzykrotnie różniczkowalnej  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o dodatniej pochodnej pierwszego rzędu, pochodna trzeciego rzędu funkcji  $f$  odwrotnej do  $g$  wyraża się wzorem:

$$f'''(g(x)) = \frac{a \cdot (g''(x))^2 + b \cdot g'(x) \cdot g'''(x)}{(g'(x))^k}.$$

**Zadanie 36. (10 punktów)**

Przy każdym z poniższych 28 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

**P** - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

**F** - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

**N** - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie  $n$  poprawnych odpowiedzi otrzymasz  $\max(0, n - 18)$  punktów.

O zdaniu  $T(n)$  wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi implikacja  $T(n) \Rightarrow T(5n)$ ,
- dla każdej liczby naturalnej  $n > 13$  zachodzi implikacja  $T(n) \Rightarrow T(n - 13)$ ,
- implikacja  $T(11) \Rightarrow T(12)$  jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości implikacji:

- |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $T(130) \Rightarrow T(131)$ ..... | b) $T(130) \Rightarrow T(132)$ ..... |
| c) $T(130) \Rightarrow T(133)$ ..... | d) $T(130) \Rightarrow T(134)$ ..... |
| e) $T(130) \Rightarrow T(135)$ ..... | f) $T(130) \Rightarrow T(136)$ ..... |
| g) $T(130) \Rightarrow T(137)$ ..... | h) $T(131) \Rightarrow T(132)$ ..... |
| i) $T(131) \Rightarrow T(133)$ ..... | j) $T(131) \Rightarrow T(134)$ ..... |
| k) $T(131) \Rightarrow T(135)$ ..... | l) $T(131) \Rightarrow T(136)$ ..... |
| m) $T(131) \Rightarrow T(137)$ ..... | n) $T(132) \Rightarrow T(133)$ ..... |
| o) $T(132) \Rightarrow T(134)$ ..... | p) $T(132) \Rightarrow T(135)$ ..... |
| q) $T(132) \Rightarrow T(136)$ ..... | r) $T(132) \Rightarrow T(137)$ ..... |
| s) $T(133) \Rightarrow T(134)$ ..... | t) $T(133) \Rightarrow T(135)$ ..... |
| u) $T(133) \Rightarrow T(136)$ ..... | v) $T(133) \Rightarrow T(137)$ ..... |
| w) $T(134) \Rightarrow T(135)$ ..... | x) $T(134) \Rightarrow T(136)$ ..... |
| y) $T(134) \Rightarrow T(137)$ ..... | z) $T(135) \Rightarrow T(136)$ ..... |
| ż) $T(135) \Rightarrow T(137)$ ..... | ź) $T(136) \Rightarrow T(137)$ ..... |