

KOŁOKWIUM nr 10, 8.01.2018, godz. 12:15–13:00**Zadanie 20. (10 punktów)**

Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y = x^2$ oraz paraboli o równaniu $y = x^2 - 8x$.

Rozwiązanie:

Niech (a, a^2) i $(b, b^2 - 8b)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 - 8x$. Ponieważ $f'(x) = 2x$ oraz $g'(x) = 2x - 8$, równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 \quad \text{oraz} \quad y = (2b - 8) \cdot x - b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 2b - 8 \quad \text{oraz} \quad -a^2 = -b^2.$$

Z drugiego równania otrzymujemy $a = \pm b$, a ponieważ pierwsze równanie daje $b - a = 4 \neq 0$, musi być $a = -b$. Stąd $b = 2$ oraz $a = -2$.

W konsekwencji szukana prosta ma równanie

$$y = -4x - 4.$$

Zadanie 21. (2x5=10 punktów)

a) Rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^5}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^5}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + x^2} = 1.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze.

b) Rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnych jednostronnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{\sqrt[4]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^6}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{1 + x^2} = 1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{-|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^6}{x^4}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[4]{1 + x^2} = -1. \end{aligned}$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja nie jest tam różniczkowalna.

Odpowiedź: Funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze.