

KOŁOKWIUM nr 11, 15.01.2018, godz. 12:15–13:00**Zadanie 22. (10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} - x^2$$

na przedziale $[-2, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} - x^2 = \sqrt{(3x+1)^2} - x^2 = |3x+1| - x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1-x^2 & \text{dla } x \in [-1/3, 3] \\ -3x-1-x^2 & \text{dla } x \in [-2, -1/3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{dla } x \in (-1/3, 3) \\ -3-2x & \text{dla } x \in (-2, -1/3) \end{cases}$$

W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1/3, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x = 3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-2, -1/3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x = -3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 3 ,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$$f(-2) = 1,$$

$$f(-3/2) = 5/4,$$

$$f(-1/3) = -1/9,$$

$$f(3/2) = 13/4,$$

$$f(3) = 1.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/9$ w punkcie $-1/3$, a wartość największą równą $13/4$ w punkcie $3/2$.

Zadanie 23. (10 punktów)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 \quad \text{czy} \quad 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10 ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x) = 16 \operatorname{arctg} x - \ln(x^2 + 1)$.

Rozwiązanie:

Różniczkując podaną we wskazówce funkcję pomocniczą otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{16}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2(8 - x)}{x^2 + 1} > 0$$

dla $x < 8$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 8]$. W szczególności $f(7) < f(8)$, skąd dostajemy kolejno:

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 - \ln 50 < 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 - \ln 65 ,$$

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 65 < 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 50 ,$$

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 + \ln 5 < 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10 + \ln 5 ,$$

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 < 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10 .$$

Odpowiedź: Większa jest liczba $16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10$.