

KOŁOKWIUM nr 1, 16.10.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 1. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \frac{6}{1333} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 2$ mamy

$$L = \frac{1}{3}$$

oraz

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1/3 = 1/3$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n \geq 2$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \frac{6}{1333} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 + n + 1)}, \quad (\clubsuit)$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1$.

Wychodząc od lewej strony równości $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)} + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)} + \frac{n}{(n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n^2 + n + 1}{2 \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} + \frac{2n}{2 \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n^2 - n + 1}{2 \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 + n + 1)} = P. \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n \geq 2$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$.

Zadanie 2. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{27} \cdot n \leq 2^n + 13 \cdot 2^{28}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 26$.

Dla $n \leq 26$ zachodzą nierówności

$$2^{27} \cdot n \leq 2^{27} \cdot 26 = 2^{28} \cdot 13 < 2^n + 13 \cdot 2^{28},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 27$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 27$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 2^{27} \cdot 27,$$

$$P = 2^{27} + 13 \cdot 2^{28} = 2^{27} + 13 \cdot 2 \cdot 2^{27} = 27 \cdot 2^{27},$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geq 27$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{27} \cdot n \leq 2^n + 13 \cdot 2^{28}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{27} \cdot (n+1) \leq 2^{n+1} + 13 \cdot 2^{28}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 27$ otrzymujemy

$$L = 2^{27} \cdot (n+1) = 2^{27} \cdot n + 2^{27} \leq 2^n + 13 \cdot 2^{28} + 2^{27} \leq 2^n + 13 \cdot 2^{28} + 2^n = 2^{n+1} + 13 \cdot 2^{28} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.