

KOŁOKWIUM nr 2, 23.10.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 3. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{60} 150$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{60} 150$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{60} 150 = \frac{m}{n},$$

$$60^{m/n} = 150,$$

$$60^m = 150^n.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Sposób I

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m} \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^{2n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = n \\ m = n \\ m = 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n = 2m > m = n,$$

czyli $n > n$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Sposób II

Ostatnią niezerową cyfrą liczby 60^m jest 6, a ostatnią niezerową cyfrą liczby 150^n jest 5, zatem liczby te nie mogą być równe.

W obu sposobach doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{60} 150$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{60} 150$ jest niewymierna.

Zadanie 4. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25} \cdot \binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27} \cdot \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} = \frac{(5n)!}{n! \cdot (4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{(2n)! \cdot (2n)!} = \frac{(5n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (2n)!}$$

oraz

$$\binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n} = \frac{(5n)!}{(2n)! \cdot (3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} = \frac{(5n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (2n)!},$$

skąd

$$\binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} = \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$\sqrt[n]{25} < \sqrt[n]{27},$$

jest więc prawdziwa jako nierówność $25 < 27$ podniesiona obustronnie do dodatniej potęgi $1/n$.

Uwagi

Fakt istnienia kluczowej dla rozwiązania zadania tożsamości nie stanowi żadnej wiedzy tajemnej, gdyż tożsamość ta jest szczególnym przypadkiem tożsamości z zadania **18** z listy 1, gdzie wystarczy przyjąć $a = n$ oraz $b = c = 2n$.

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n , nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).