

Zadanie 6. (10 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[4]{n^4 + 15n^3} - n \leq 4C.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (preferowany, bo najprostszy)

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4 + 15n^3} - n = \frac{\sqrt{n^4 + 15n^3} - n^2}{\sqrt[4]{n^4 + 15n^3} + n} = \frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^3} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 15n^3} + n^2\right)}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} \frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^3} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 15n^3} + n^2\right)} &\geq \frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^4} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 15n^4} + n^2\right)} = \\ &= \frac{15n^3}{3n \cdot 5n^2} = \frac{15n^3}{15n^3} = 1 = C \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} &\frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^3} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 15n^3} + n^2\right)} \leq \\ &\leq \frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 0} + n\right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 0} + n^2\right)} = \frac{15n^3}{2n \cdot 2n^2} = \frac{15n^3}{4n^3} = \frac{15}{4} < 4 = 4C. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 1$.

Sposób II

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3},$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4 + 15n^3} - n = \frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 15n^3} + n^3}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} &\frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 15n^3} + n^3} \geq \\ &\geq \frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^4}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^4}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 15n^4} + n^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{15n^3}{8n^3 + 4n^3 + 2n^3 + n^3} = \frac{15n^3}{15n^3} = 1 = C$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} & \frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+15n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+15n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+15n^3} + n^3} \leq \\ & \leq \frac{15n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+0}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+0}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+0} + n^3} = \frac{15n^3}{4n^3} = \frac{15}{4} < 4 = 4C. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 1$.

Sposób III (dla miłośników subtelnych szacowań)

Pozbędziemy się pierwiastka szacując wyrażenie pod pierwiastkiem tak, aby można było wykonać pierwiastkowanie. Jednak szacowanie to wymaga zbyt wiele subtelności, aby taki sposób postępowania był polecany słabym i przeciętnym studentom.

Szacując dane w zadaniu wyrażenie od góry otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{n^4+15n^3} - n &< \sqrt[4]{n^4+16n^3} - n < \sqrt[4]{n^4+16n^3+96n^2+256n+256} - n = \\ &= \sqrt[4]{(n+4)^4} - n = (n+4) - n = 4. \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{n^4+15n^3} - n &= \sqrt[4]{n^4+4n^3+6n^3+4n^3+n^3} - n \geq \sqrt[4]{n^4+4n^3+6n^2+4n+1} - n = \\ &= \sqrt[4]{(n+1)^4} - n = (n+1) - n = 1. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 1$.

Sposób IV (dla wróżbitów)

Wypijamy kawę lub herbatę, a z fusów wróżyśmy, że $C = 1$ (można też zgadnąć wartość C w sposób bardziej naukowy, np. zauważając, że dla $n = 1$ dane wyrażenie ma wartość 1 i obstawiając, że poza tym będzie miało wartość większą). Wobec tego powinniśmy udowodnić nierówności

$$1 \leq \sqrt[4]{n^4+15n^3} - n \leq 4,$$

które są kolejno równoważne następującym nierównościom:

$$\begin{aligned} n+1 &\leq \sqrt[4]{n^4+15n^3} \leq n+4, \\ (n+1)^4 &\leq n^4+15n^3 \leq (n+4)^4, \\ n^4+4n^3+6n^2+4n+1 &\leq n^4+15n^3 \leq n^4+16n^3+96n^2+256n+256, \\ 6n^2+4n+1 &\leq 11n^3 \quad \text{oraz} \quad 0 \leq n^3+96n^2+256n+256. \end{aligned}$$

Prawa nierówność jest oczywista, gdyż jej prawa strona jest dodatnia, a lewa nierówność wynika z nierówności $n \geq 1$.

Udowodniliśmy więc, że wymagane oszacowania są spełnione dla stałej $C = 1$.