

KOŁOKWIUM nr 4, 13.11.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 7. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)} \frac{9}{8}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(3/2)} \frac{9}{8}$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, gdyż zarówno podstawa logarytmu jak i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{(3/2)} \frac{9}{8} &= \frac{m}{n}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{m/n} &= \frac{9}{8}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^m &= \left(\frac{9}{8}\right)^n, \\ \frac{3^m}{2^m} &= \frac{9^n}{8^n}, \\ 3^m \cdot 8^n &= 2^m \cdot 9^n, \\ 2^{3n} \cdot 3^m &= 2^m \cdot 3^{2n}. \quad (\diamond)\end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 3n = m \\ m = 2n. \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$3n = m = 2n,$$

czyli $3n = 2n$, co jest spełnione tylko dla $n = 0$.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(3/2)} \frac{9}{8}$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(3/2)} \frac{9}{8}$ jest niewymierna.

Uwaga: Powoływanie się na własności liczb naturalnych wymaga, aby stosować je do liczb naturalnych. W szczególności zapisanie równania $(\diamond)$ w postaci

$$2^{3n-m} = 3^{2n-m}$$

nie uprawnia nas do rozumowania w stylu: *lewa parzysta, prawa nieparzysta*, o ile nie wykażemy, że wykładniki występujące po obu stronach są dodatnie.

Zadanie 8. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ w liczniku ułamka pod znakiem granicy występuje różnica wyrażeń podobnej wielkości ($\approx n^3$), stosujemy na poziomie licznika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Ponieważ w mianowniku tegoż ułamka występuje różnica wyrażeń **różnego rzędu wielkości** ($\approx n^{3/2}$ oraz $\approx n^2$), stosowanie jakiegokolwiek wzoru skróconego mnożenia jest zbyteczne, a nawet szkodliwe, bo prowadzi do skomplikowania rachunków – wszelkie błędy rachunkowe spowodowane wyborem niepotrzebnie uciążliwej rachunkowo drogi rozwiązania mogą być surowo karane.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + n^5 + 1 - n^6}{\left(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^6 + n^5 + 1} + n^3\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 1}{\left(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^6 + n^5 + 1} + n^3\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^{-5}}{\left(\sqrt[4]{n^{-2} + n^{-3} + n^{-8}} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + n^{-1} + n^{-6}} + 1\right)} = \\ &= \frac{1 + 0}{\left(\sqrt[4]{0 + 0 + 0} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + 0 + 0} + 1\right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-1/2$.