

KOŁOKWIUM nr 51, 26.10.2017, godz. 14:15–15:45**Zadanie 51. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5)^s}{(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4)^t} \leq 18C.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5)^s}{(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4)^t} = \frac{(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4)^t \cdot (8n^7)^s}{(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5)^s \cdot (3n^7)^t} = \frac{(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} \leq \frac{(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10}+0+n^5})^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = \frac{(3n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(2n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = 2^{2s} \cdot n^{2s-3t}$$

i od dołu

$$\frac{(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} \geq \frac{(\sqrt{n^8+0+n^4})^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10}+8n^{10}+n^5})^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = \frac{(2n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(4n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = \frac{2^{s+t} \cdot n^{2s-3t}}{3^t}.$$

Ponieważ oszacowania mają być niezależne od n , musi być $2s-3t=0$, wobec czego przyjmujemy $s=3$ i $t=2$. Wówczas dolne oszacowanie przybiera wartość $C=32/9$, a górne $64=18C$.

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $s=3$, $t=2$ oraz $C=32/9$.

Zadanie 52. (10 punktów)

Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna $q > 1$ spełniająca równość $q^q = 16$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy więc, że taka liczba q istnieje i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego m/n o naturalnym liczniku i mianowniku.

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/n} &= 16, \\ \left(\frac{m}{n}\right)^m &= 16^n, \\ m^m &= 16^n \cdot n^m.\end{aligned}\tag{♡}$$

Dowód zostanie zakończony, jeżeli wykazemy, że równanie (♡) nie może być spełnione przez względnie pierwsze liczby naturalne m, n . Tę część dowodu można przeprowadzić różnymi sposobami.

Sposób I (najprostszy):

Liczba n nie może być równa 1, gdyż w takim przypadku równanie (♡) przyjąłoby postać $m^m = 16$, skąd wobec $2^2 < 16 < 3^3$ mielibyśmy $2 < m < 3$.

Zatem liczba n , jako liczba naturalna większa od 1, ma dzielnik pierwszy, oznaczmy go przez p . Wówczas prawa strona równości (♡) jest podzielna przez p , a zatem lewa strona też jest podzielna przez p . Skoro jednak liczba m^m jest podzielna przez liczbę pierwszą p , to także m jest podzielne przez p , co przeczy założeniu, że liczby m i n są względnie pierwsze.

Sposób II (jeśli ktoś się zapatrzy na liczbę $16 = 2^4$ i nie dostrzeże sposobu I):

Ponieważ prawa strona równania (♡) jest podzielna przez 2, to i lewa strona też jest podzielna przez 2, a w konsekwencji liczba m jest parzysta, a względnie pierwsza z nią liczba n jest nieparzysta. Niech k będzie wykładnikiem, z jakim liczba 2 wchodzi do rozkładu liczby m na iloczyn potęg liczb pierwszych. Porównując wykładniki, z jakimi dwójka występuje po obu stronach równości (♡) otrzymujemy

$$km = 4n, \quad \text{skąd} \quad \frac{m}{n} = \frac{4}{k}.$$

Wobec nierówności $m > n$ musi być $k \leq 3$, skąd para (m, n) jest jedną z par $(4, 1)$, $(2, 1)$, $(4, 3)$ (odpowiednio dla $k = 1, 2, 3$).

To zostawia trzy potencjalne wartości q mogące spełniać daną w treści zadania równość, a mianowicie $q = 4$, $q = 2$ i $q = 4/3$. Jednak bez trudu sprawdzamy, że żadna z tych liczb nie spełnia równania $q^q = 16$, np. dlatego, że żadna nie wpada do przedziału $(2, 3)$.

Zadanie 53. (20 punktów)

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ zachodzi nierówność

$$(n-2)^{2n+1} \cdot n^{4n} \cdot (n+2)^{2n-1} < (n-1)^{4n} \cdot (n+1)^{4n}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Przepisujemy daną nierówność w postaci

$$(n^2 - 2n)^{2n+1} \cdot (n^2 + 2n)^{2n-1} < (n^2 - 1)^{4n}$$

i zauważamy, że w otrzymanej nierówności po każdej ze stron znajduje się iloczyn $4n$ czynników dodatnich o takiej samej sumie równej $4n^3 - 4n$.

Zgodnie z przeformułowaniem nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, iloczyn ustalonej liczby czynników nieujemnych o ustalonej sumie jest największy, gdy wszystkie jego czynniki są równe. Stąd wynika prawdziwość dowodzonej nierówności.

Sposób II (pomysł zaczerpnięty z pracy pana Wojciecha Burego)

Z nierówności

$$(n-2) \cdot n < (n-1)^2$$

oraz

$$(n+2) \cdot n < (n+1)^2$$

wynika

$$(n-2)^{2n} \cdot n^{4n} \cdot (n+2)^{2n} < (n-1)^{4n} \cdot (n+1)^{4n},$$

skąd

$$(n-2)^{2n+1} \cdot n^{4n} \cdot (n+2)^{2n-1} < (n-2)^{2n} \cdot n^{4n} \cdot (n+2)^{2n} < (n-1)^{4n} \cdot (n+1)^{4n}.$$

Zadanie 54. (10 punktów)

Przy każdym z poniższych 28 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 18)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n^5)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 7$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n - 7)$,
- implikacja $T(4) \Rightarrow T(3)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości implikacji:

- | | |
|--|--|
| a) $T(70) \Rightarrow T(770) \dots \mathbf{P}$ | b) $T(70) \Rightarrow T(771) \dots \mathbf{N}$ |
| c) $T(70) \Rightarrow T(772) \dots \mathbf{P}$ | d) $T(70) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{N}$ |
| e) $T(70) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{P}$ | f) $T(70) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{N}$ |
| g) $T(70) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{N}$ | h) $T(71) \Rightarrow T(771) \dots \mathbf{P}$ |
| i) $T(71) \Rightarrow T(772) \dots \mathbf{P}$ | j) $T(71) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{N}$ |
| k) $T(71) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{P}$ | l) $T(71) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{N}$ |
| m) $T(71) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{N}$ | n) $T(72) \Rightarrow T(772) \dots \mathbf{P}$ |
| o) $T(72) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{F}$ | p) $T(72) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{P}$ |
| q) $T(72) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{F}$ | r) $T(72) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{N}$ |
| s) $T(73) \Rightarrow T(773) \dots \mathbf{P}$ | t) $T(73) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{P}$ |
| u) $T(73) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{P}$ | v) $T(73) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{P}$ |
| w) $T(74) \Rightarrow T(774) \dots \mathbf{P}$ | x) $T(74) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{F}$ |
| y) $T(74) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{N}$ | z) $T(75) \Rightarrow T(775) \dots \mathbf{P}$ |
| ż) $T(75) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{P}$ | ż) $T(76) \Rightarrow T(776) \dots \mathbf{P}$ |