

KOŁOKWIUM nr 52, 9.11.2017, godz. 14:15–15:00

Zadanie 55. (10 punktów) Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$n^{2^{2017}} < 2^n < n^{2^{2018}}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Przyjmijmy $n = 2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$2^{k \cdot 2^{2017}} < 2^{2^k} < 2^{k \cdot 2^{2018}},$$

czyli

$$k \cdot 2^{2017} < 2^k < k \cdot 2^{2018}.$$

Zauważmy, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k = 2028$, gdyż wtedy

$$k \cdot 2^{2017} = 2028 \cdot 2^{2017} < 2048 \cdot 2^{2017} = 2^{11} \cdot 2^{2017} = 2^{2028} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{2028} = 2^{10} \cdot 2^{2018} = 1024 \cdot 2^{2018} < 2028 \cdot 2^{2018} = k \cdot 2^{2018}.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 2^{2028}$.

Sposób II

Przyjmijmy $n = k \cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$(k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < 2^{k \cdot 2^{2017}} < (k \cdot 2^{2017})^{2^{2018}},$$

czyli

$$(k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < (2^k)^{2^{2017}} < (k^2 \cdot 2^{4034})^{2^{2017}},$$

co jest równoważne nierównościom

$$k \cdot 2^{2017} < 2^k < k^2 \cdot 2^{4034} \quad (\heartsuit).$$

Zauważmy, że nierówności $(\heartsuit)$ są prawdziwe dla $k = 2028$, gdyż wówczas

$$k \cdot 2^{2017} = 2028 \cdot 2^{2017} < 2048 \cdot 2^{2017} = 2^{11} \cdot 2^{2017} = 2^{2028} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{2028} = 2^{20} \cdot 2^{2008} = 1024^2 \cdot 2^{2008} < 2028^2 \cdot 2^{2008} = k^2 \cdot 2^{2008} < k^2 \cdot 2^{4034}.$$

Ale nierówności $(\heartsuit)$ są też prawdziwe dla $k = 4056$, gdyż wówczas

$$k \cdot 2^{2017} = 4056 \cdot 2^{2017} < 4096 \cdot 2^{2017} = 2^{12} \cdot 2^{2017} = 2^{2029} < 2^{4056} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{4056} = 2^{22} \cdot 2^{4034} = 2048^2 \cdot 2^{4034} < 4056^2 \cdot 2^{4034} = k^2 \cdot 2^{4034}.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 2028 \cdot 2^{2017}$. A innym przykładem jest $n = 4056 \cdot 2^{2017}$.

Zadanie 56. (10 punktów) Dobrać odpowiednie stałe a , g oraz C i udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$g - \frac{C}{n} < \sqrt{n^4 + n^3} - n^2 - an < g + \frac{C}{n}.$$

Rozwiązanie:

Dane w treści zadania nierówności są równoważne nierówności

$$\left| \sqrt{n^4 + n^3} - n^2 - an - g \right| < \frac{C}{n},$$

której lewą stronę przekształcamy korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{n^4 + n^3} - n^2 - an - g \right| &= \left| \sqrt{n^4 + n^3} - (n^2 + an + g) \right| = \frac{\left| n^4 + n^3 - (n^2 + an + g)^2 \right|}{\sqrt{n^4 + n^3} + (n^2 + an + g)} = \\ &= \frac{\left| n^4 + n^3 - n^4 - 2a \cdot n^3 - (2g + a^2) \cdot n^2 - 2ag \cdot n - g^2 \right|}{\sqrt{n^4 + n^3} + (n^2 + an + g)}. \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

Ponieważ w ostatnim wyrażeniu mianownik jest rzędu n^2 , a celujemy w oszacowanie całego ułamka przez wielkość rzędu n^{-1} , licznik nie może być rzędu większego niż n^1 . Stąd wynika, że jednomiany rzędu większego niż n^1 muszą się uprościć, co prowadzi do równości

$$1 = 2a \quad \text{oraz} \quad 2g + a^2 = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad g = -\frac{1}{8}.$$

Podstawiamy te wartości do $(\spadesuit)$ i przeprowadzamy końcowe oszacowanie (korzystamy przy tym z nierówności $n/2 - 1/8 > 0$):

$$\frac{\left| \frac{1}{8} \cdot n - \frac{1}{64} \right|}{\sqrt{n^4 + n^3} + \left(n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{8} \right)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot n - \frac{1}{64}}{\sqrt{n^4 + n^3} + n^2 + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{8} \right)} < \frac{\frac{1}{8} \cdot n - 0}{\sqrt{n^4 + 0} + n^2 + 0} = \frac{1/16}{n}.$$

Uzyskaliśmy więc wymagane oszacowania dla stałych $a = 1/2$, $g = -1/8$ i $C = 1/16$.