

KOŁOKWIUM nr 53, 16.11.2017, godz. 14:15–15:00

Zadanie 57. (16 punktów) Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$4^n < n^{2^{2017}} < 8^n.$$

Rozwiązanie:

Ślepa uliczka

Przyjmijmy $n = 2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$4^{2^k} < 2^{k \cdot 2^{2017}} < 8^{2^k},$$

czyli kolejno

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^k &< k \cdot 2^{2017} < 3 \cdot 2^k, \\ 2 \cdot 2^{k-2017} &< k < 3 \cdot 2^{k-2017}. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

Jednak nie udaje się dobrać liczby naturalnej k , która spełniałaby nierówności $(\heartsuit)$.

Rozwiązanie poprawne

Przyjmijmy $n = k \cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$4^{k \cdot 2^{2017}} < (k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < 8^{k \cdot 2^{2017}},$$

czyli

$$(4^k)^{2^{2017}} < (k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < (8^k)^{2^{2017}},$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 4^k &< k \cdot 2^{2017} < 8^k, \\ 2^{2k} &< k \cdot 2^{2017} < 2^{3k}. \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

Zauważmy, że nierówności $(\clubsuit)$ są prawdziwe dla $k = 1000$, gdyż wówczas

$$2^{2k} = 2^{2000} < 1000 \cdot 2^{2017} < 2^{10} \cdot 2^{2017} = 2^{2027} < 2^{3000} = 2^{3k}.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 1000 \cdot 2^{2017}$.

Uwaga 1

Liczbę wymaganą w zadaniu otrzymamy także dla k spełniających nierówności

$$676 \leq k \leq 1013.$$

Zauważ, że wśród tych liczb nie ma potęgi dwójki!!!

Uwaga 2

Zadanie sprawdzało, czy studenci przeczytali sposób II rozwiązania zadania 55 z kolokwium 52.

Uwaga 3

Uwaga 2 jest umiarkowanie przydatna, gdyż studenci nie mający w zwyczaju zaglądać do rozwiązań zadań z kolokwium i tak jej nie przeczytają.

Zadanie 58. (14 punktów) Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci **ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej**. Za każde zadanie, w którym podasz poprawną odpowiedź (liczba k i uproszczona granica) otrzymasz **2 punkty**.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{2} \right) = 1/8$ dla $k = -4$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{2} \right) = 2$ dla $k = -4$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{3} \right) = 1/48$ dla $k = -6$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{3} \right) = 4/3$ dla $k = -6$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{3}}{2} \right) = 1/72$ dla $k = -6$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{4} \right) = 2/3$ dla $k = -8$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{4}}{3} \right) = 4/81$ dla $k = -12$