

KOŁOKWIUM nr 54, 23.11.2017, godz. 14:15–15:25

Zadanie 59. (10 punktów) Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^k + n^2 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^k + n^2 + 2}} + \frac{3}{\sqrt{n^k + n^2 + 3}} + \frac{4}{\sqrt{n^k + n^2 + 4}} + \dots + \frac{2n+1}{\sqrt{n^k + (n+1)^2}} \right)$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $2n+1$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^k + n^2 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^k + n^2 + 2}} + \frac{3}{\sqrt{n^k + n^2 + 3}} + \frac{4}{\sqrt{n^k + n^2 + 4}} + \dots + \frac{2n+1}{\sqrt{n^k + (n+1)^2}} \right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy przy $k \geq 3$ mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\sqrt{n^k + n^2 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^k + n^2 + 2}} + \frac{3}{\sqrt{n^k + n^2 + 3}} + \frac{4}{\sqrt{n^k + n^2 + 4}} + \dots + \frac{2n+1}{\sqrt{n^k + (n+1)^2}} \leq \\ &\leq \frac{1+2+3+4+\dots+(2n+1)}{\sqrt{n^k+0}} = \frac{1+2+3+4+\dots+(2n+1)}{n^{k/2}} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\sqrt{n^k + n^2 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^k + n^2 + 2}} + \frac{3}{\sqrt{n^k + n^2 + 3}} + \frac{4}{\sqrt{n^k + n^2 + 4}} + \dots + \frac{2n+1}{\sqrt{n^k + (n+1)^2}} \geq \\ &\geq \frac{1+2+3+4+\dots+(2n+1)}{\sqrt{n^k + (n+1)^2}} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\dots+(2n+1) = (2n+1) \cdot (n+1).$$

Wobec tego

$$c_n = \frac{(2n+1) \cdot (n+1)}{n^{k/2}} \rightarrow 2$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $k=4$. Podobnie

$$a_n = \frac{(2n+1) \cdot (n+1)}{\sqrt{n^k + (n+1)^2}} = \frac{(2n+1) \cdot (n+1)}{n^{k/2} \cdot \sqrt{1 + (1+n^{-1})^2 \cdot n^{2-k}}} \rightarrow 2$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $k=4$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma dla $k=4$ wartość 2.

Zadanie 60. (20 punktów) Obliczyć granicę ciągu zaczynającego się od wyrazu o indeksie 7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}} + \frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}} + \frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}} + \frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}} + \dots + \frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}} + \frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}} \right)$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy przy $k \geq 2$ mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak początek siódmej kolumny trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}} + \frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}} + \frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}} + \frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}} + \dots + \frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}} + \frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}} \leq \\ &\leq \frac{\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{n-1}{7} + \binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+0}} = \\ &= \frac{\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{n-1}{7} + \binom{n}{7}}{n^{k/2}} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}} + \frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}} + \frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}} + \frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}} + \dots + \frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}} + \frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}} \geq \\ &\geq \frac{\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{n-1}{7} + \binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę początkowych wyrazów kolumny trójkąta Pascala otrzymujemy

$$\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{n-1}{7} + \binom{n}{7} = \binom{n+1}{8}.$$

Wobec tego

$$c_n = \frac{\binom{n+1}{8}}{n^{k/2}} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot (n-6)/8!}{n^{k/2}} \rightarrow \frac{1}{8!}$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $k = 16$. Podobnie

$$a_n = \frac{\binom{n+1}{8}}{\sqrt{n^k + n}} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot (n-6)/8!}{n^{k/2} \cdot \sqrt{1 + n^{1-k}}} \rightarrow \frac{1}{8!}$$

przy $n \rightarrow \infty$, o ile $k = 16$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1/8!$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/8!,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1/8!.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma dla $k = 16$ wartość $1/8! = 1/40320$.

Zadanie 61. (20 punktów) W każdym z zadań **61.1-61.10** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy (ale co najmniej jeden w postaci rażąco nieuproszczonej) i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$\mathbf{61.1.} \quad A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60n + 888} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = -1/3$$

$$\sup A = 1/4$$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

$$\mathbf{61.2.} \quad B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60n + 999} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = 0$$

$$\sup B = 1/99$$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

$$\mathbf{61.3.} \quad C = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 60n + 999} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = -1/100$$

$$\sup C = 1/99$$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

$$\mathbf{61.4.} \quad D = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 60n + 1001} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = -1/102$$

$$\sup D = 1/101$$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

$$61.5. E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5n^3 \leq 3m^3 \leq 27n^3 \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = \sqrt[3]{5/3}$$

$$\sup E = \sqrt[3]{9}$$

Czy kres dolny należy do zbioru E **NIE** Czy kres górny należy do zbioru E **NIE**

$$61.6. F = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^n \leq 3^m \leq 27^n \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf F = \log_3 5$$

$$\sup F = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru F **NIE** Czy kres górny należy do zbioru F **TAK**

$$61.7. G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^{n^3} \leq 3^{m^3} \leq 27^{n^3} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf G = \sqrt[3]{\log_3 5}$$

$$\sup G = \sqrt[3]{3}$$

Czy kres dolny należy do zbioru G **NIE** Czy kres górny należy do zbioru G **NIE**

$$61.8. H = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \cdot n^m \leq m^m \leq 27^n \cdot n^m \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf H = 2$$

$$\sup H = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru H **TAK** Czy kres górny należy do zbioru H **TAK**

$$61.9. I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{24n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{18n} \cdot n^m \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf I = 8$$

$$\sup I = 9$$

Czy kres dolny należy do zbioru I **TAK** Czy kres górny należy do zbioru I **TAK**

$$61.10. J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^{50n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{81n} \cdot n^m \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf J = 25$$

$$\sup J = 27$$

Czy kres dolny należy do zbioru J **TAK** Czy kres górny należy do zbioru J **TAK**