

KOŁOKWIUM nr 57, 14.12.2017, godz. 14:15–15:25**Zadanie 67. (20 punktów)**

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[6]{x^6 + 10^6}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^6 - b^6 = (a^2 - b^2) \cdot (a^4 + a^2b^2 + b^4) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^4 + a^2b^2 + b^4),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^6 - b^6}{(a + b) \cdot (a^4 + a^2b^2 + b^4)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[6]{x^6 + 10^6}$ oraz $b = \sqrt[6]{y^6 + 10^6}$, zauważamy, że $a, b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[6]{x^6 + 10^6} - \sqrt[6]{y^6 + 10^6} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^6 + 10^6) - (y^6 + 10^6)}{\left(\sqrt[6]{x^6 + 10^6} + \sqrt[6]{y^6 + 10^6} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{(x^6 + 10^6)^2} + \sqrt[3]{x^6 + 10^6} \cdot \sqrt[3]{y^6 + 10^6} + \sqrt[3]{(y^6 + 10^6)^2} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^6 - y^6|}{\left(\sqrt[6]{x^6 + 10^6} + \sqrt[6]{y^6 + 10^6} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{(x^6 + 10^6)^2} + \sqrt[3]{x^6 + 10^6} \cdot \sqrt[3]{y^6 + 10^6} + \sqrt[3]{(y^6 + 10^6)^2} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^4 + x^2y^2 + y^4)}{\left(\sqrt[6]{x^6 + 10^6} + \sqrt[6]{y^6 + 10^6} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{(x^6 + 10^6)^2} + \sqrt[3]{x^6 + 10^6} \cdot \sqrt[3]{y^6 + 10^6} + \sqrt[3]{(y^6 + 10^6)^2} \right)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt[6]{x^6}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt[6]{x^6} + \sqrt[6]{y^6} < \sqrt[6]{x^6 + 10^6} + \sqrt[6]{y^6 + 10^6},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt[6]{x^6 + 10^6} + \sqrt[6]{y^6 + 10^6}} < 1. \quad (2)$$

Z kolei równość $x^2 = \sqrt[3]{x^6}$ prowadzi do:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= \sqrt[3]{(x^6)^2} + \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{y^6} + \sqrt[3]{(y^6)^2} < \\ &< \sqrt[3]{(x^6 + 10^6)^2} + \sqrt[3]{x^6 + 10^6} \cdot \sqrt[3]{y^6 + 10^6} + \sqrt[3]{(y^6 + 10^6)^2}, \end{aligned}$$

skąd

$$\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{\sqrt[3]{(x^6 + 10^6)^2} + \sqrt[3]{x^6 + 10^6} \cdot \sqrt[3]{y^6 + 10^6} + \sqrt[3]{(y^6 + 10^6)^2}} < 1. \quad (3)$$

Zastosowanie nierówności (2) i (3) do (1) pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned}
 & \frac{|x-y| \cdot |x+y| \cdot (x^4 + x^2y^2 + y^4)}{\left(\sqrt[6]{x^6+10^6} + \sqrt[6]{y^6+10^6}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{(x^6+10^6)^2} + \sqrt[3]{x^6+10^6} \cdot \sqrt[3]{y^6+10^6} + \sqrt[3]{(y^6+10^6)^2}\right)} = \\
 & = |x-y| \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt[6]{x^6+10^6} + \sqrt[6]{y^6+10^6}} \cdot \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{\sqrt[3]{(x^6+10^6)^2} + \sqrt[3]{x^6+10^6} \cdot \sqrt[3]{y^6+10^6} + \sqrt[3]{(y^6+10^6)^2}} < \\
 & < |x-y| \cdot 1 \cdot 1 = |x-y|.
 \end{aligned}$$

Zadanie 68. (20 punktów)

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 10^3}$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej C istnieją takie liczby rzeczywiste x, y , że

$$|f(x) - f(y)| > C \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $x = -10$ oraz $y = -10 - \varepsilon$, gdzie liczba rzeczywista dodatnia ε będzie sprecyzowana później. Wówczas $|x - y| = \varepsilon$, a ponadto

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \sqrt[3]{300\varepsilon + 30\varepsilon^2 + \varepsilon^3} > \sqrt[3]{300\varepsilon} > \sqrt[3]{289\varepsilon} = \sqrt[3]{289} \cdot \sqrt[3]{\varepsilon} = \frac{\sqrt[3]{289}}{\varepsilon^{2/3}} \cdot \varepsilon = \\ &= \frac{\sqrt[3]{289}}{\varepsilon^{2/3}} \cdot |x - y| = C \cdot |x - y|, \end{aligned}$$

o ile założymy, że

$$C = \frac{\sqrt[3]{289}}{\varepsilon^{2/3}},$$

czyli kolejno

$$\varepsilon^{2/3} = \frac{\sqrt[3]{289}}{C},$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\sqrt[3]{289}}{C} \right)^{3/2},$$

$$\varepsilon = \frac{17}{C^{3/2}}.$$

Zadanie 69. (100 punktów)

Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Udowodnić, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left| f\left(\sqrt[16]{x^{16} + 10^{16}}\right) - f\left(\sqrt[16]{y^{16} + 10^{16}}\right) \right| \leq (x - y)^{16}.$$

Rozwiązanie:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$ oraz dowolnej liczby naturalnej n oznaczmy

$$x_i = x + i \cdot \frac{y - x}{n}$$

dla $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Odnotujmy, że przy tych oznaczeniach $x_0 = x$, $x_n = y$, a ponadto $x_i - x_{i-1} = (y - x)/n$. Tak więc punkty x_i dzielą przedział $[x, y]$ na n przedziałów równej długości.

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z założeń o funkcji f otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(y - x)^2}{n^2} = \frac{(y - x)^2}{n}. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy więc, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$ oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{(x - y)^2}{n},$$

co po ustaleniu x, y i przejściu z n do $+\infty$ daje

$$|f(x) - f(y)| \leq 0,$$

wobec czego

$$|f(x) - f(y)| = 0$$

i w konsekwencji f jest funkcją stałą.

A skoro funkcja f jest stała, to nierówność podana w tezie zadania jest oczywiście spełniona.