

KOŁOKWIUM nr 58, 21.12.2017, godz. 14:15–15:45**Zadanie 70. (15 punktów)**

Udowodnić, że równanie

$$10^x = x \cdot 7^x$$

ma co najmniej dwa rozwiązania rzeczywiste.

*Rozwiązanie:*Rozważmy funkcję pomocniczą $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = 10^x - x \cdot 7^x.$$

Funkcja ta jest ciągła, a ponadto zachodzą nierówności:

$$f(2) = 10^2 - 2 \cdot 7^2 = 100 - 98 > 0,$$

$$f(3) = 10^3 - 3 \cdot 7^3 = 1000 - 3 \cdot 343 < 0$$

oraz

$$f(4) = 10^4 - 4 \cdot 7^4 = 100^2 - 98^2 > 0.$$

Z własności Darboux funkcji ciągłych wynika, że funkcja f przyjmuje wartość 0 w przedziale $(2, 3)$ oraz w przedziale $(3, 4)$. Pozostaje odnotować, że punkty zerowania się funkcji f są rozwiązaniami równania danego w treści zadania.

Zadanie 71. (25 punktów)

Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$|f(x+n) - f(x)| < \frac{1}{n}.$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Rozwiązanie:

Dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą następujące nierówności (korzystamy z nierówności trójkąta oraz z założeń o funkcji f):

$$\begin{aligned} |f(x+1) - f(x)| &= |f(x+1) - f(x+n+1) + f(x+n+1) - f(x)| \leq \\ &\leq |f(x+1) - f(x+n+1)| + |f(x+n+1) - f(x)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

czyli

$$|f(x+1) - f(x)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Wobec dowolności n otrzymujemy

$$|f(x+1) - f(x)| = 0,$$

skąd $f(x+1) = f(x)$. Zatem funkcja f jest funkcją okresową o okresie 1.

Zadanie 72. (20 punktów)

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[32]{x^2 + 10^{32}}$. Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{10^{16}}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^{32} - b^{32} = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) \cdot (a^8 + b^8) \cdot (a^{16} + b^{16}),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^{32} - b^{32}}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) \cdot (a^8 + b^8) \cdot (a^{16} + b^{16})}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[32]{x^2 + 10^{32}}$ oraz $b = \sqrt[32]{y^2 + 10^{32}}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[32]{x^2 + 10^{32}} - \sqrt[32]{y^2 + 10^{32}} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 10^{32}) - (y^2 + 10^{32})}{\left(\sqrt[32]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[32]{y^2 + 10^{32}} \right) \cdot \left(\sqrt[16]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[16]{y^2 + 10^{32}} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[8]{y^2 + 10^{32}} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\sqrt[4]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[4]{y^2 + 10^{32}} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^{32}} + \sqrt{y^2 + 10^{32}} \right) \right| = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[32]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[32]{y^2 + 10^{32}} \right) \cdot \left(\sqrt[16]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[16]{y^2 + 10^{32}} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[8]{y^2 + 10^{32}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\sqrt[4]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[4]{y^2 + 10^{32}} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^{32}} + \sqrt{y^2 + 10^{32}} \right)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 10^{32}} + \sqrt{y^2 + 10^{32}},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 10^{32}} + \sqrt{y^2 + 10^{32}}} < 1. \quad (2)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[32]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[32]{y^2 + 10^{32}}} \leq \frac{1}{\sqrt[32]{0 + 10^{32}} + \sqrt[32]{0 + 10^{32}}} = \frac{1}{10 + 10} = \frac{1}{20}. \quad (3)$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[16]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[16]{y^2 + 10^{32}}} \leq \frac{1}{\sqrt[16]{0 + 10^{32}} + \sqrt[16]{0 + 10^{32}}} = \frac{1}{100 + 100} = \frac{1}{200}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^2 + 10^{32}} + \sqrt[8]{y^2 + 10^{32}}} \leq \frac{1}{\sqrt[8]{0 + 10^{32}} + \sqrt[8]{0 + 10^{32}}} = \frac{1}{10000 + 10000} = \frac{1}{20000} \quad (5)$$

oraz

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^{32}}+\sqrt[4]{y^2+10^{32}}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0+10^{32}}+\sqrt[4]{0+10^{32}}} = \frac{1}{10^8+10^8} = \frac{1}{2 \cdot 10^8}. \quad (6)$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x-y| \cdot |x+y|}{\left(\sqrt[32]{x^2+10^{32}}+\sqrt[32]{y^2+10^{32}}\right) \cdot \left(\sqrt[16]{x^2+10^{32}}+\sqrt[16]{y^2+10^{32}}\right) \cdot \left(\sqrt[8]{x^2+10^{32}}+\sqrt[8]{y^2+10^{32}}\right)} \\ & \quad \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^{32}}+\sqrt[4]{y^2+10^{32}}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+10^{32}}+\sqrt{y^2+10^{32}}\right)} = \\ & = |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[32]{x^2+10^{32}}+\sqrt[32]{y^2+10^{32}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[16]{x^2+10^{32}}+\sqrt[16]{y^2+10^{32}}} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^{32}}+\sqrt[8]{y^2+10^{32}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^{32}}+\sqrt[4]{y^2+10^{32}}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^{32}}+\sqrt{y^2+10^{32}}} \leq \\ & \leq |x-y| \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{1}{20000} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^8} \cdot 1 = \frac{|x-y|}{16 \cdot 10^{15}} \leq \frac{|x-y|}{10^{16}}. \end{aligned}$$

Sposób II

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^{32} - b^{32} = (a^{16} + b^{16}) \cdot (a^{16} - b^{16}) = (a^{16} + b^{16}) \cdot (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{15} a^k b^{15-k},$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^{32} - b^{32}}{(a^{16} + b^{16}) \cdot \sum_{k=0}^{15} a^k b^{15-k}}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[32]{x^2+10^{32}}$ oraz $b = \sqrt[32]{y^2+10^{32}}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności (2):

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[32]{x^2+10^{32}} - \sqrt[32]{y^2+10^{32}} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2+10^{32}) - (y^2+10^{32})}{\left(\sqrt{x^2+10^{32}}+\sqrt{y^2+10^{32}}\right) \cdot \sum_{k=0}^{15} \left(\sqrt[32]{x^2+10^{32}}\right)^k \left(\sqrt[32]{y^2+10^{32}}\right)^{15-k}} \right| = \\ &= \frac{|x-y| \cdot |x+y|}{\left(\sqrt{x^2+10^{32}}+\sqrt{y^2+10^{32}}\right) \cdot \sum_{k=0}^{15} \left(\sqrt[32]{x^2+10^{32}}\right)^k \left(\sqrt[32]{y^2+10^{32}}\right)^{15-k}} \leq \\ &\leq \frac{|x-y|}{\sum_{k=0}^{15} \left(\sqrt[32]{x^2+10^{32}}\right)^k \left(\sqrt[32]{y^2+10^{32}}\right)^{15-k}} \leq \frac{|x-y|}{\sum_{k=0}^{15} \left(\sqrt[32]{0+10^{32}}\right)^k \left(\sqrt[32]{0+10^{32}}\right)^{15-k}} = \\ &= \frac{|x-y|}{\sum_{k=0}^{15} 10^{15}} = \frac{|x-y|}{16 \cdot 10^{15}} \leq \frac{|x-y|}{10^{16}}. \end{aligned}$$

Zadanie 73. (240 punktów)

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{k^2 + m^3 + n^6} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do sześciu liczb $k^2/3, k^2/3, k^2/3, m^3/2, m^3/2, n^6$ otrzymujemy

$$\sqrt[6]{\frac{k^6 m^6 n^6}{108}} \leq \frac{k^2 + m^3 + n^6}{6},$$

czyli

$$\frac{kmn}{k^2 + m^3 + n^6} \leq \frac{\sqrt[6]{108}}{6}.$$

Zatem liczba $\sqrt[6]{108}/6$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z . Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu rozważmy następujące ciągi liczb:

$$n_i = 10^i, \quad m_i = \left[\sqrt[3]{2} \cdot 10^{2i} \right], \quad k_i = \left[\sqrt{3} \cdot 10^{3i} \right].$$

To prowadzi do następującego ciągu elementów zbioru Z :

$$\frac{k_i m_i n_i}{k_i^2 + m_i^3 + n_i^6} = \frac{\frac{k_i}{10^{3i}} \cdot \frac{m_i}{10^{2i}} \cdot \frac{n_i}{10^i}}{\left(\frac{k_i}{10^{3i}}\right)^2 + \left(\frac{m_i}{10^{2i}}\right)^3 + \left(\frac{n_i}{10^i}\right)^6} \rightarrow \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 1}{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt[3]{2})^3 + 1} = \frac{\sqrt[6]{108}}{6}.$$

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $\sqrt[6]{108}/6$.