

KOŁOKWIUM nr 5, 20.11.2017, godz. 12:15–13:45**Zadanie 9. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^k + n^4 + 2} + \frac{n^4 + 3}{n^k + n^4 + 3} + \frac{n^4 + 4}{n^k + n^4 + 4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+1)^4 - n^4 + 1 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 2$ składników. Szacujemy ją od góry przez iloczyn liczby składników i wspólnego górnego oszacowania składników:

$$\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^k + n^4 + 2} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \leq (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{(n+1)^4}{n^k + 0}$$

i analogicznie od dołu:

$$\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \geq (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^k + (n+1)^4}.$$

Następnie kolejno obliczamy granice przy $n \rightarrow \infty$ oszacowań górnego i dolnego.

$$\frac{(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot (n+1)^4}{n^k} = \frac{(4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}) \cdot (1 + n^{-1})^4}{n^{k-7}} \rightarrow 4,$$

o ile $k = 7$.

$$(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^k + (n+1)^4} = \frac{4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}}{n^{k-7} + (1 + n^{-1})^4 \cdot n^{-3}} \rightarrow 4,$$

o ile $k = 7$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 7$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Zadanie 10. (15 punktów)

W każdym z zadań **10.1–10.7** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

Piętnasty punkt otrzymasz za komplet poprawnych odpowiedzi.

$$10.1. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + \dots + n}{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k + 1) + \dots + (2n + 1)} = \mathbf{1/2}$$

$$10.2. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + \dots + (2n + 1)}{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k + 1) + \dots + (2n + 1)} = \mathbf{2}$$

$$10.3. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + \dots + 2^n}{1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^k + \dots + 4^n} = \mathbf{3/8}$$

$$10.4. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + \dots + 4^n}{1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^k + \dots + 4^n} = \mathbf{3/2}$$

$$10.5. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + \dots + 8^n}{1 + 8 + 64 + 512 + \dots + 8^k + \dots + 8^n} = \mathbf{7/4}$$

$$10.6. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^k + \dots + 64^n}{1 + 8 + 64 + 512 + \dots + 8^k + \dots + 64^n} = \mathbf{7/6}$$

$$10.7. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + \dots + 2^n)^2}{1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^k + \dots + 4^n} = \mathbf{3}$$

Zadanie 11. (15 punktów)

W każdym z zadań **11.1–11.15** wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 3, 5, 10, 20, 30, 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 2000, 3000, 5000, 10000, 10^5 , 10^6 , 10^7 , 10^8 , 10^9 , 10^{10} , 10^{20} , 10^{50} , 10^{100} , 10^{200} , 10^{500} , 10^{1000} , 10^{2000} , 10^{5000} , $10^{10\,000}$, $10^{20\,000}$, $10^{50\,000}$, $10^{100\,000}$, $10^{200\,000}$, $10^{500\,000}$, $10^{1\,000\,000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

Za każde zadanie, w którym podasz poprawną odpowiedź (czyli parę liczb spełniających warunki zadania), otrzymasz **1 punkt**.

$$11.1. \quad 10^{20} < 27^{27} < 10^{50}$$

$$11.2. \quad 10^{20} < 3^{34} < 10^{50}$$

$$11.3. \quad 10^{20} < 2^{27} < 10^{50}$$

$$11.4. \quad 10^{20} < 4^{43} < 10^{50}$$

$$11.5. \quad 10^{500\,000} < 150\,000! < 10^{1\,000\,000}$$

$$11.6. \quad 10^{2\,000} < (333!)^5 < 10^{5\,000}$$

$$11.7. \quad 10^{20\,000} < (333!)^{50} < 10^{50\,000}$$

$$11.8. \quad 10^{100} < (\sqrt{26} - 5)^{-100} < 10^{200}$$

$$11.9. \quad 10^{50} < (5 - 2\sqrt{6})^{-100} < 10^{100}$$

$$11.10. \quad 1 < 1000^{\sqrt{26}-5} < 2$$

$$11.11. \quad 0 < \sqrt{10^6 + 10^3} - 10^3 < 1$$

$$11.12. \quad 3 < \sqrt{10^6 + 10^4} - 10^3 < 5$$

$$11.13. \quad 30 < \sqrt{10^6 + 10^5} - 10^3 < 50$$

$$11.14. \quad 500 < \sqrt{10^6 + 10^5} - 10^2 < 1000$$

$$11.15. \quad 1000 < \sqrt{10^6 + 10^5} - 10 < 2000$$