

KOŁOKWIUM nr 60, 11.01.2018, godz. 14:15–15:25**Zadanie 77. (20 punktów)**

Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie sześciokątnej i ustalonej objętości. Rozstrzygnąć, który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. W odpowiedzi podać iloraz wysokości do krawędzi podstawy.

Rozwiązanie:

Niech V będzie ustaloną objętością, a a krawędzią podstawy graniastosłupa. Pole powierzchni podstawy jest wówczas równe $3\sqrt{3} \cdot a^2/2$, co daje wysokość równą

$$h = \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot a^2}.$$

Pole powierzchni całkowitej jest wówczas równe

$$P(a) = 3\sqrt{3} \cdot a^2 + 6 \cdot ah = 3\sqrt{3} \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot a^2} = 3\sqrt{3} \cdot a^2 + \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot a}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} P(a) = +\infty.$$

Ponadto

$$P'(a) = 6\sqrt{3} \cdot a - \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot a^2},$$

skąd $P'(a) = 0$ dla

$$a = \sqrt[3]{\frac{2V}{9}}$$

i dla takiej właśnie długości krawędzi podstawy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa osiąga minimum. Wówczas

$$\frac{h}{a} = \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot a^3} = \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot 2V/9} = \sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Najmniejsze pole powierzchni ma graniastosłup, w którym stosunek wysokości do krawędzi podstawy jest równy $\sqrt{3}$.

Zadanie 78. (40 punktów)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2017}(3x) \cdot \sin x > \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^{2017}(3x) \cdot \sin x.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2017 \cdot \sin^{2016}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 \cdot \sin x + \sin^{2017}(3x) \cdot \cos x = \\ &= 6051 \cdot \sin^{2016}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot \sin x + \sin^{2017}(3x) \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6051 \cdot \sin^{2016}\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{6} + \sin^{2017}\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 6051 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/6$ wartość $1/2$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/6) \neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/6$ także wartość większą od $1/2$.

Uwaga:

Ponieważ $f'(\pi/6) > 0$, funkcja f ma maksimum lokalne (i jak się okazuje, globalne) na prawo od $\pi/6$. Jednak dokładniejsze jego zbadanie bez użycia komputera okazuje się niezwykle trudne. Pochodna funkcji f zeruje się bowiem w punkcie (w przybliżeniu) $\pi/6 + 0,0000954$, a sama funkcja f osiąga tam maksimum w przybliżeniu równe $0,5000413$. Jest to wartość tak nieznacznie przekraczająca $1/2$, że niewyobrażalne wydaje się rozwiązanie zadania przez bezpośrednie szacowanie wartości funkcji f w konkretnym punkcie.

Jeśli posuniemy się nieco dalej na prawo od punktu $\pi/6$, zobaczymy, że funkcja f dosyć szybko maleje, mamy na przykład

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 0,001\right) \approx 0,49634$$

oraz

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 0,01\right) \approx 0,20519.$$

Zadanie 79. (60 punktów)

Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2018 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{e})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right).$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \\ e^x \cdot e^y - e^y &= e^x + 1, \\ e^x \cdot e^y - e^x - e^y &= 1. \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y , krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x = y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x . W konsekwencji $g(x) = x$ dla $x > 0$ i $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{e}) = 1$ jest liczbą wymierną.