

KOŁOKWIUM nr **61**, 18.01.2018, godz. 14:15–15:45Zadanie **80.** (24 punkty)

W każdym z zadań **80.1-80.4** funkcja $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

W każdym z czterech zadań za 0, 1, 2, 3 poprawne odpowiedzi otrzymasz odpowiednio **0, 1, 3, 6 punktów**.

80.1. $f_1(x) = x^3 + x$

$$g'_1(0) = 1$$

$$g'_1(2) = 1/4$$

$$g'_1(130) = 1/76$$

80.2. $f_2(x) = x^7 + x$

$$g'_2(0) = 1$$

$$g'_2(2) = 1/8$$

$$g'_2(130) = 1/449$$

80.3. $f_3(x) = x^3 + 5x$

$$g'_3(0) = 1/5$$

$$g'_3(6) = 1/8$$

$$g'_3(42) = 1/32$$

80.4. $f_4(x) = x^5 + 5x$

$$g'_4(0) = 1/5$$

$$g'_4(6) = 1/10$$

$$g'_4(42) = 1/85$$

Zadanie 81. (10 x 3 = 30 punktów)

W każdym z zadań **81.1-81.10** podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego największą wartość wyrażenia przy a , b i ewentualnie c przebiegających liczby całkowite dodatnie oraz podaj przykład pary/trójki liczb całkowitych dodatnich a , b i ewentualnie c , dla której ta największa wartość jest osiągana.

81.1. $\max \frac{ab}{a^2 + 4b^2} = \frac{1}{4}$	dla	$a = \mathbf{2},$	$b = \mathbf{1}$
---	-----	-------------------	------------------

81.2. $\max \frac{ab}{4a^2 + 9b^2} = \frac{1}{12}$	dla	$a = \mathbf{3},$	$b = \mathbf{2}$
---	-----	-------------------	------------------

81.3. $\max \frac{abc}{a^3 + b^3 + 8c^3} = \frac{1}{6}$	dla	$a = \mathbf{2},$	$b = \mathbf{2},$	$c = \mathbf{1}$
--	-----	-------------------	-------------------	------------------

81.4. $\max \frac{abc}{a^3 + 8b^3 + 27c^3} = \frac{1}{18}$	dla	$a = \mathbf{6},$	$b = \mathbf{3},$	$c = \mathbf{2}$
---	-----	-------------------	-------------------	------------------

81.5. $\max \frac{abc}{a^2 + 8b^4 + 8c^4} = \frac{1}{8}$	dla	$a = \mathbf{4},$	$b = \mathbf{1},$	$c = \mathbf{1}$
---	-----	-------------------	-------------------	------------------

81.6. $\max \frac{abc}{8a^2 + b^4 + c^4} = \frac{1}{8}$	dla	$a = \mathbf{2},$	$b = \mathbf{2},$	$c = \mathbf{2}$
--	-----	-------------------	-------------------	------------------

81.7. $\max \frac{abc}{3a^2 + 2b^3 + 64c^6} = \frac{1}{12}$	dla	$a = \mathbf{8},$	$b = \mathbf{4},$	$c = \mathbf{1}$
--	-----	-------------------	-------------------	------------------

81.8. $\max \frac{abc}{3a^2 + 16b^3 + c^6} = \frac{1}{12}$	dla	$a = \mathbf{8},$	$b = \mathbf{2},$	$c = \mathbf{2}$
---	-----	-------------------	-------------------	------------------

81.9. $\max \frac{ab^2}{4a^3 + b^3} = \frac{1}{3}$	dla	$a = \mathbf{1},$	$b = \mathbf{2}$
---	-----	-------------------	------------------

81.10. $\max \frac{ab^3}{27a^4 + b^4} = \frac{1}{4}$	dla	$a = \mathbf{1},$	$b = \mathbf{3}$
---	-----	-------------------	------------------

Zadanie 82. (96 punktów)

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{e^{e^{2018}} + 1} + \sqrt{e^{e^{2018}} - 1} - 1 \right) + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{e^{e^{2018}} + 1} - \sqrt{e^{e^{2018}} - 1} - 1 \right)$$

na przedziale $[10, 50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

*Rozwiązanie:*Funkcja $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$g(t) = \operatorname{arctg}(t-1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t} - 1\right)$$

ma pochodną

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{(t-1)^2 + 1} + \frac{-2/t^2}{\left(\frac{2}{t} - 1\right)^2 + 1} = \frac{1}{t^2 - 2t + 2} - \frac{2}{(2-t)^2 + t^2} = \\ &= \frac{1}{t^2 - 2t + 2} - \frac{2}{4 - 4t + 2t^2} = \frac{1}{t^2 - 2t + 2} - \frac{1}{2 - 2t + t^2} = 0, \end{aligned}$$

jest więc stała. Ponieważ

$$g(1) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

mamy $g(t) = \pi/4$ dla każdego $t \in (0, +\infty)$.

Pozostaje zauważyć, że przyjmując

$$t = \sqrt{e^{e^{2018}} + 1} + \sqrt{e^{e^{2018}} - 1}$$

otrzymujemy

$$\frac{2}{t} = \sqrt{e^{e^{2018}} + 1} - \sqrt{e^{e^{2018}} - 1},$$

skąd

$$f(x) = g(t) = \frac{\pi}{4}.$$

Zatem f jest funkcją stałą równą $\pi/4$. W konsekwencji przyjmuje ona na całym rozważanym przedziale $[10, 50]$ największą (a zarazem najmniejszą) wartość $\pi/4$ (niewymierną, bo π jest niewymierne).