

KOŁOKWIUM nr 62, 25.01.2018, godz. 14:15–15:45**Zadanie 83. (120 punktów)**

Niech $\mathbb{F}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających następujące dwa warunki:

1° Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f(x)| \leq x^2$.

2° Dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \leq 10 \cdot |x - y|$.

W każdym z zadań **83.1-83.15** podaj kres górny zbioru.

Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\binom{n+1}{2}$ punktów.

$$\mathbf{83.1.} \quad \sup\{|f(4)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{16}$$

$$\mathbf{83.8.} \quad \sup\{|f(2) - f(1)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{5}$$

$$\mathbf{83.2.} \quad \sup\{|f(6)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{35}$$

$$\mathbf{83.9.} \quad \sup\{|f(3) - f(2)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{83.3.} \quad \sup\{|f(9)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{65}$$

$$\mathbf{83.10.} \quad \sup\{|f(3) - f(1)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{83.4.} \quad \sup\{|f(11)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{85}$$

$$\mathbf{83.11.} \quad \sup\{|f(5) - f(2)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{29}$$

$$\mathbf{83.5.} \quad \sup\{|f(15)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{125}$$

$$\mathbf{83.12.} \quad \sup\{|f(5) - f(3)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{20}$$

$$\mathbf{83.6.} \quad \sup\{|f(20)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{175}$$

$$\mathbf{83.13.} \quad \sup\{|f(6) - f(2)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{39}$$

$$\mathbf{83.7.} \quad \sup\{|f(30)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{275}$$

$$\mathbf{83.14.} \quad \sup\{|f(6) - f(1)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{36}$$

$$\mathbf{83.15.} \quad \sup\{|f(7) - f(1)| : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{46}$$

Zadanie 84. (120 punktów)

W każdym z zadań **84.1-84.8** dla podanej funkcji $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

Za n poprawnych pochodnych jednostronnych otrzymasz $\binom{n}{2}$ punktów.

84.1. $f_1(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$	$f'_1(0^-) = -1/\sqrt{2}$	$f'_1(0^+) = 1/\sqrt{2}$
--	---------------------------	--------------------------

84.2. $f_2(x) = \sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1}$	$f'_2(0^-) = -1$	$f'_2(0^+) = 1$
---	------------------	-----------------

84.3. $f_3(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+4}-2}$	$f'_3(0^-) = -1/2$	$f'_3(0^+) = 1/2$
--	--------------------	-------------------

84.4. $f_4(x) = \sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9}$	$f'_4(0^-) = -2/3$	$f'_4(0^+) = 2/3$
--	--------------------	-------------------

84.5. $f_5(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$	$f'_5(0^-) = -1/2$	$f'_5(0^+) = 1/2$
---	--------------------	-------------------

84.6. $f_6(x) = \sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1}$	$f'_6(0^-) = -1/\sqrt{2}$	$f'_6(0^+) = 1/\sqrt{2}$
--	---------------------------	--------------------------

84.7. $f_7(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$	$f'_7(0^-) = -1/(4\sqrt{2})$	$f'_7(0^+) = 1/(4\sqrt{2})$
--	------------------------------	-----------------------------

84.8. $f_8(x) = \sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3}$	$f'_8(0^-) = -(\sqrt{2})/(3\sqrt{3})$	$f'_8(0^+) = (\sqrt{2})/(3\sqrt{3})$
---	---------------------------------------	--------------------------------------

Zadanie **85. (120 punktów)**

W każdym z zadań **85.1-85.5** dla podanej funkcji $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f_i(g_i(x)) = x^3 + 3x.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\binom{n+1}{2}$ punktów.

85.1. $g_1(x) = x^3 + x + 6$	$f'_1(8) = 3/2$	$f'_1(16) = 15/13$	$f'_1(36) = 15/14$
------------------------------	-----------------	--------------------	--------------------

85.2. $g_2(x) = x^3 + 2x + 3$	$f'_2(6) = 6/5$	$f'_2(15) = 15/14$	$f'_2(36) = 30/29$
-------------------------------	-----------------	--------------------	--------------------

85.3. $g_3(x) = 2x^3 + x$	$f'_3(3) = 6/7$	$f'_3(18) = 3/5$	$f'_3(57) = 6/11$
---------------------------	-----------------	------------------	-------------------

85.4. $g_4(x) = x^5 + x + 2$	$f'_4(2) = 3$	$f'_4(4) = 1$	$f'_4(36) = 5/27$
------------------------------	---------------	---------------	-------------------

85.5. $g_5(x) = x^5 + 2x$	$f'_5(0) = 3/2$	$f'_5(3) = 6/7$	$f'_5(36) = 15/82$
---------------------------	-----------------	-----------------	--------------------
