

KOŁOKWIUM nr 6, 27.11.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 12.** (10 punktów, w tym 4 punkty za wyznaczenie A i B)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie miało sens.*Rozwiązanie:*

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+5 \cdot \frac{2An+A^2}{5}}}{n^2+2n+1+2(B-1)n+B^2-1} = \\ = \frac{\sqrt{n^2+5 \cdot \frac{2An+A^2}{5}}}{(n+1)^2+3 \cdot \frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k}, \quad (1)$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{5} = \frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}, \quad (2)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$3 \cdot (2An+A^2) = 5 \cdot (2(B-1)n+B^2-1), \\ 6An+3A^2 = 10(B-1)n+5(B^2-1). \quad (3)$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 6A &= 10(B-1) \\ 3A^2 &= 5(B^2-1) \end{cases} \\ \begin{cases} 3A &= 5(B-1) \\ 3A^2 &= 5(B-1)(B+1) \end{cases} \quad (4)$$

Dzieląc drugie równanie układu (4) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A > 0$ i $B > 1$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A = B + 1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$3B+3 = 5B-5,$$

skąd $B = 4$ i $A = 5$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n) = 2n + 5.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $2n + 6$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+6) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} \leq \sum_{k=0}^{2n+5} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} \leq (2n+6) \cdot \frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+6) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} = \frac{(2n+6) \cdot n}{(n+4)^2} = \frac{2 + \frac{6}{n}}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} \rightarrow 2$$

oraz

$$(2n+6) \cdot \frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2} = \frac{(2n+6) \cdot (n+5)}{(n+1)^2} = \frac{\left(2 + \frac{6}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow 2.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 5$, $B = 4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.

Zadanie 13. (10 punktów)

W każdym z zadań **13.1-13.5** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$\mathbf{13.1.} \quad A = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = \mathbf{1/100}$$

$$\sup A = \mathbf{9/25}$$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **NIE**

$$\mathbf{13.2.} \quad B = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^3 : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = \mathbf{-27/125}$$

$$\sup B = \mathbf{8/125}$$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

$$\mathbf{13.3.} \quad C = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = \mathbf{-1}$$

$$\sup C = \mathbf{1/4}$$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

$$\mathbf{13.4.} \quad D = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = \mathbf{-1}$$

$$\sup D = \mathbf{1/16}$$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

$$\mathbf{13.5.} \quad E = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^{n^2+n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = \mathbf{0}$$

$$\sup E = \mathbf{1}$$

Czy kres dolny należy do zbioru E **NIE** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**