

KOŁOKWIUM nr 7, 4.12.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 14. (10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1 > 0$ oraz $0 < q < 1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n = a_1 q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ponieważ wyrazy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

wyrażają się odpowiednio wzorami

$$a_n^2 = a_1^2 \cdot (q^2)^{n-1} \quad \text{oraz} \quad a_n^4 = a_1^4 \cdot (q^4)^{n-1},$$

szeregi te są szeregami geometrycznymi o ilorazach odpowiednio q^2 oraz q^4 . Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{a_1^4}{1-q^4}.$$

Zatem warunek podany w treści zadania przyjmuje postać

$$\frac{a_1}{1-q} = 3 \cdot \frac{a_1^2}{1-q^2} = 15 \cdot \frac{a_1^4}{1-q^4},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 3 \cdot \frac{a_1^2}{1-q^2} \\ \frac{a_1^2}{1-q^2} = 5 \cdot \frac{a_1^4}{1-q^4} \end{cases}$$

równoważnego (po uproszczeniu) układowi

$$\begin{cases} 1+q = 3 \cdot a_1 \\ 1+q^2 = 5 \cdot a_1^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $q = 3a_1 - 1$, co po podstawieniu do równania drugiego daje

$$1 + (3a_1 - 1)^2 = 5a_1^2,$$

czyli kolejno

$$1 + 9a_1^2 - 6a_1 + 1 = 5a_1^2,$$

$$4a_1^2 - 6a_1 + 2 = 0,$$

$$2a_1^2 - 3a_1 + 1 = 0,$$

co jest spełnione przez $a_1 = 1$ oraz $a_1 = 1/2$, prowadzące odpowiednio do $q = 2$ oraz $q = 1/2$. Pierwsze z tych rozwiązań odrzucamy, gdyż nie spełnia ono nierówności $q < 1$.

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Zadanie 15. (10 punktów)

W każdym z zadań **15.1-15.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za poprawne podanie n z 12 kresów otrzymasz **max(0, n - 2) punktów**.

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n}.$$

15.1. $A = \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

Poprawne kresy

$\inf A = -\infty$

$\sup A = +\infty$

15.2. $B = \{a_3 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

Poprawne kresy

$\inf B = -3/2$

$\sup B = 3/2$

15.3. $C = \{a_4 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

Poprawne kresy

$\inf C = -5/6$

$\sup C = 5/6$

15.4. $D = \{a_4 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

Poprawne kresy

$\inf D = -11/6$

$\sup D = 11/6$

15.5. $E = \{(a_3 - a_1)^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

Poprawne kresy

$\inf E = 0$

$\sup E = 9/4$

15.6. $F = \{a_3^2 - a_1^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

Poprawne kresy

$\inf F = -\infty$

$\sup F = +\infty$