

KOŁOKWIUM nr 8, 11.12.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 16. (10 punktów)**

W każdym z zadań **16.1-16.5** podaj (w postaci przedziału lub sumy przedziałów, być może rozciągających się do $\pm\infty$) dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

Końce przedziałów będące liczbami wymiernymi należy zapisać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Za każdą poprawnie podaną dziedzinę otrzymasz **2 punkty**.

16.1. $f(x) = \log_2 \log_x 256$ $D_f = (1, +\infty)$

16.2. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_x 256$ $D_f = (1, 256)$

16.3. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256$ $D_f = (1, 16)$

16.4. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256$ $D_f = (1, 4)$

16.5. $f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256$ $D_f = (1, \sqrt{2})$

Zadanie 17. (10 punktów)

Niech funkcja $f : [16, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [16, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{128}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 16$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \right| = \frac{|\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}|}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} = \\ &= \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{16 \cdot 16} \cdot (\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{16}) \cdot (\sqrt{16} + \sqrt{16})} = \\ &= \frac{|x - y|}{4 \cdot (2 + 2) \cdot (4 + 4)} = \frac{|x - y|}{128}, \end{aligned}$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 16$.