

KOŁOKWIUM nr 9, 18.12.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 18. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{30} 360$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{30} 360$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{30} 360 = \frac{m}{n},$$

$$30^{m/n} = 360,$$

$$30^m = 360^n.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Sposób I

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^{3n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} m = 3n \\ m = 2n \\ m = n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$m = 3n > n = m,$$

czyli $m > m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Sposób II

Ostatnia niezerowa cyfra liczby 30^m jest nieparzysta, a ostatnia niezerowa cyfra liczby 360^n jest parzysta, zatem liczby te nie mogą być równe.

W obu sposobach doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{30} 360$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{30} 360$ jest niewymierna.

Zadanie 19. (10 punktów)

Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na załączonej kartce z rysunkami. W każdym z zadań **19.a-19.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

Za każdy poprawnie przyporządkowany wykres otrzymasz **1 punkt**.

Kartkę z rysunkami zabierz do domu na pamiątkę.

19.a. $f(x) = \{|x|\}$ **5**

19.b. $f(x) = \{x\}^2$ **1**

19.c. $f(x) = \{|x|\}^2$ **4**

19.d. $f(x) = \sqrt{\{x\}}$ **8**

19.e. $f(x) = \sqrt{\{|x|\}}$ **7**

19.f. $f(x) = \{\sqrt{|x|}\}$ **6**

19.g. $f(x) = \sqrt[5]{\{x\}}$ **9**

19.h. $f(x) = \{\sqrt[5]{x}\}$ **10**

19.i. $f(x) = \{x\}^5$ **2**

19.j. $f(x) = \{|x|\}^5$ **3**



