

Kolokwium nr 11: poniedziałek 15.01.2018, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–500.28.

10. Pochodna funkcji (c.d.). Znajdowanie najmniejszej i największej wartości funkcji na przedziale domkniętym.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 8,10.01.2018 (grupy 2–5).

W każdym z zadań **500.1-500.7** podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

500.1. $f_1(x) = \ln(x^3 + 1)$

$f'_1(1) = \dots\dots\dots$ $f'_1(2) = \dots\dots\dots$ $f'_1(3) = \dots\dots\dots$

500.2. $f_2(x) = \arctg(x^2)$

$f'_2(1) = \dots\dots\dots$ $f'_2(2) = \dots\dots\dots$ $f'_2(3) = \dots\dots\dots$

500.3. $f_3(x) = \sqrt{24x+1}$

$f'_3(0) = \dots\dots\dots$ $f'_3(1) = \dots\dots\dots$ $f'_3(2) = \dots\dots\dots$

500.4. $f_4(x) = \sqrt[3]{x^3 - x + 8}$

$f'_4(-1) = \dots\dots\dots$ $f'_4(0) = \dots\dots\dots$ $f'_4(1) = \dots\dots\dots$

500.5. $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2 + 9}}$

$f'_5(-1) = \dots\dots\dots$ $f'_5(0) = \dots\dots\dots$ $f'_5(1) = \dots\dots\dots$

500.6. $f_6(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^5 - x + 32}}$

$f'_6(-1) = \dots\dots\dots$ $f'_6(0) = \dots\dots\dots$ $f'_6(1) = \dots\dots\dots$

500.7. $f_7(x) = \sqrt{8x+1} \cdot \sqrt[3]{7x^2+1}$

$f'_7(0) = \dots\dots\dots$ $f'_7(1) = \dots\dots\dots$ $f'_7(3) = \dots\dots\dots$

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

500.8. $x^2 + 2x + 21$, $[-2, 7]$

500.9. $|x^2 - 1| + 3x$, $[-2, 2]$

500.10. $|x + 1| + x^2$, $[-10, 10]$

500.11. $|10x - 1| + x^3$, $[0, 1]$

500.12. $\ln x - \frac{x}{10}$, $[1, e^3]$

500.13. $|\sin x| + \frac{x}{2}$, $[0, 2\pi]$

500.14. $3\sin x + \sin 3x$, $[0, 2\pi]$

500.15. $x^2 + x - \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}$, $\left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right]$

500.16. $x - 4\sqrt{x} + \ln x$, $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

500.17. $-3x + (x^2 - 6x + 9)^{3/2}$, $[1, 5]$

500.18. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta u góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

500.19. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie trójkątnej i objętości 1. Który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej?

500.20. Interesuje nas punkt na osi OX o najmniejszej sumie odległości od punktów $(-1,1)$ i $(2,2)$. Wyznaczyć ten punkt dwoma sposobami:

- a) brutalnym rachunkiem z pochodnymi,
- b) sprytną geometrią (odbicie).

500.21. W beczce pełnej wody robimy gwoździem dziurę. Z dziury tryska poziomo strumień wody. Na jakiej wysokości należy zrobić dziurę, aby strumień wody tryskał jak najdalej? Jak daleko tryska wtedy strumień? Jak zmieni się odpowiedź na Księżycu, gdzie grawitacja jest 6 razy słabsza?

Przypomnienie dla tych, co nie uważali na lekcji fizyki: prędkość wytrysku wody jest równa prędkości ciała, które spadło swobodnie od poziomu lustra wody do poziomu dziury (bilans energii). Ruch wody jest złożeniem dwóch ruchów — jednostajnego w poziomie i jednostajnie przyspieszonego w pionie.

500.22. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

500.23. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{99} - \frac{10 \cdot \ln(x^2 + 1)}{99} + \operatorname{arctg} x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

500.24. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

500.25. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - x - 12|$$

na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

500.26. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 3x + |x^3 - 9x|$$

na przedziale $[-4, \sqrt{10}]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

500.27. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

500.28. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 16x + 4} - x^2$$

na przedziale $[-1, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.