

500.22. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x^2 - 6| = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{dla } x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty) \\ -x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 - 6 & \text{dla } x \in [-4, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, 3] \\ x - x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{dla } x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3) \\ 1 - 2x & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $1 + 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $1 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -4 i 3 ,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$f(-4) = 6,$$

$$f(-\sqrt{6}) = -\sqrt{6},$$

$$f(1/2) = 6,25,$$

$$f(\sqrt{6}) = \sqrt{6},$$

$$f(3) = 6.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6,25 = 25/4$ w punkcie $1/2$.

500.23. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{99} - \frac{10 \cdot \ln(x^2 + 1)}{99} + \operatorname{arctg} x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{99} - \frac{10 \cdot 2x}{99 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{99 \cdot (x^2 + 1)} - \frac{20x}{99 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{99}{99 \cdot (x^2 + 1)} = \\ &= \frac{x^2 - 20x + 100}{99 \cdot (x^2 + 1)} = \frac{(x - 10)^2}{99 \cdot (x^2 + 1)} \geq 0, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x = 10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9, a największą na końcu, czyli w punkcie 11.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$\begin{aligned} f(9) &= \frac{1}{11} - \frac{10 \cdot \ln 82}{99} + \operatorname{arctg} 9 \approx \mathbf{1,105925}, \\ f(10) &= \frac{10}{99} - \frac{10 \cdot \ln 101}{99} + \operatorname{arctg} 10 \approx \mathbf{1,105964}, \\ f(11) &= \frac{1}{9} - \frac{10 \cdot \ln 122}{99} + \operatorname{arctg} 11 \approx \mathbf{1,105993}. \end{aligned}$$

500.24. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} = \frac{4x^2 - 36x + 81}{4x^3} = \frac{(2x - 9)^2}{4x^3} \geq 0,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x = 9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4, a największą na końcu, czyli w punkcie 5.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$\begin{aligned}f(4) &= \frac{207}{128} + \ln 4 \approx 3,00348, \\f(9/2) &= \frac{3}{2} + \ln(9/2) \approx 3,00408, \\f(5) &= \frac{279}{200} + \ln 5 \approx 3,00444.\end{aligned}$$

500.25. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - x - 12|$$

na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3).$$

Stąd

$$|x^2 - x - 12| = \begin{cases} x^2 - x - 12 & \text{dla } x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty) \\ -x^2 + x + 12 & \text{dla } x \in (-3, 4) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 12 & \text{dla } x \in [-5, -3] \cup [4, 5] \\ -x^2 + 2x + 12 & \text{dla } x \in (-3, 4) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5, 5]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in (-5, -3) \cup (4, 5) \\ -2x + 2 & \text{dla } x \in (-3, 4) \end{cases}$$

W punktach -3 i 4 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-5, -3) \cup (4, 5)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5, -3) \cup (4, 5)$.

2° W przypadku $x \in (-3, 4)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-2x + 2 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, 4)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 5 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 1 ,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3 i 4 .

$$f(-5) = 13,$$

$$f(-3) = -3,$$

$$f(1) = 13,$$

$$f(4) = 4,$$

$$f(5) = 13.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -3 w punkcie -3 , a wartość największą równą 13 w punktach -5 , 1 i 5 .

500.26. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 3x + |x^3 - 9x|$$

na przedziale $[-4, \sqrt{10}]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^3 - 9x = (x - 3) \cdot x \cdot (x + 3).$$

Stąd

$$|x^3 - 9x| = \begin{cases} x^3 - 9x & \text{dla } x \in [-3, 0] \cup [3, +\infty) \\ -x^3 + 9x & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x & \text{dla } x \in [-3, 0] \cup [3, \sqrt{10}] \\ -x^3 + 12x & \text{dla } x \in [-4, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, \sqrt{10}]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & \text{dla } x \in (-3, 0) \cup (3, \sqrt{10}) \\ -3x^2 + 12 & \text{dla } x \in (-4, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

W punktach -3 , 0 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-3, 0) \cup (3, \sqrt{10})$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3x^2 = 6$, co ma dwa rozwiązania $x = \pm\sqrt{2}$, z których tylko jedno, a mianowicie $x = -\sqrt{2}$, należy do rozważanego zbioru $(-3, 0) \cup (3, \sqrt{10})$.

2° W przypadku $x \in (-4, -3) \cup (0, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3x^2 = 12$, co ma dwa rozwiązania $x = \pm 2$, z których tylko jedno, a mianowicie $x = 2$, należy do rozważanego zbioru $(-4, -3) \cup (0, 3)$.

Porównamy wartości funkcji f w siedmiu punktach:

- końce przedziału: -4 i $\sqrt{10}$,
- miejsca zerowe pochodnej: $-\sqrt{2}$ i 2 ,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3 , 0 i 3 .

$$f(-4) = 16, \quad f(-3) = -9, \quad f(0) = 13, \quad f(2) = 16, \quad f(3) = 9,$$

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 + 6 \cdot \sqrt{2} = -2 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \in (4, 8), \quad \text{bo } \sqrt{2} \in (1, 2),$$

$$f(\sqrt{10}) = (\sqrt{10})^3 - 6 \cdot \sqrt{10} = 10 \cdot \sqrt{10} - 6 \cdot \sqrt{10} = 4 \cdot \sqrt{10} \in (12, 16), \quad \text{bo} \quad \sqrt{10} \in (3, 4).$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -9 w punkcie -3 , a wartość największą równą 16 w punktach -4 i 2 .

500.27. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = x^2 - \sqrt{9x^2 + 6x + 1} = x^2 - \sqrt{(3x+1)^2} = x^2 - |3x+1|$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 1 & \text{dla } x \in [-1/3, 2] \\ x^2 + 3x + 1 & \text{dla } x \in [-2, -1/3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 2]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dla } x \in (-1/3, 2) \\ 2x + 3 & \text{dla } x \in (-2, -1/3) \end{cases}$$

W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1/3, 2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x - 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3, 2)$.

2° W przypadku $x \in (-2, -1/3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x + 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = -3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 2 ,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$$f(-2) = -1,$$

$$f(-3/2) = -5/4,$$

$$f(-1/3) = 1/9,$$

$$f(3/2) = -13/4,$$

$$f(2) = -3 = -12/4.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-13/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą $1/9$ w punkcie $-1/3$.

500.28. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 16x + 4} - x^2$$

na przedziale $[-1, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągnięte.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 16x + 4} - x^2 = \sqrt{(4x - 2)^2 - x^2} = |4x - 2| - x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2 - x^2 & \text{dla } x \in [1/2, 3] \\ -4x + 2 - x^2 & \text{dla } x \in [-1, 1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-1, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{dla } x \in (1/2, 3) \\ -4 - 2x & \text{dla } x \in (-1, 1/2) \end{cases}$$

W punkcie $1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (1/2, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $4 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 2$, które należy do rozważanego przedziału $(1/2, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-1, 1/2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-4 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -2$, które **nie należy** do rozważanego przedziału $(-1, 1/2)$.

Porównamy wartości funkcji f w czterech punktach:

- końce przedziału: -1 i 3 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 2 ,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $1/2$.

$$f(-1) = 5,$$

$$f(1/2) = -1/4,$$

$$f(2) = 2,$$

$$f(3) = 1.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/4$ w punkcie $1/2$, a wartość największą równą 5 w punkcie -1 .