

Kolokwium nr 12: poniedziałek 22.01.2018, godz. 12:15-13:45, materiał zad. 1–500.63.

**10. Pochodna funkcji (c.d.). Twierdzenie Lagrange’a.
Reguła de l’Hospitla. Pochodne wyższych rzędów.**

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 15,17.01.2018 (grupy 2–5).

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange’a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

500.29. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto

$$\begin{aligned} f_1(3) &= 1, \quad f_1(5) = 2, \\ f_2(0) &= 3, \quad f_2(4) = -1, \\ f_3(-5) &= 0, \quad f_3(15) = 10, \\ f_4(1) &= 2, \quad \forall_x f'_4(x) \neq 1, \\ f_5(0) &= 0, \quad f_5(2) = 10, \quad \forall_x f'_5(x) \neq 2, \\ f_6(0) &= 7, \quad \forall_x f'_6(x) > 2, \\ f_7(3) &= 5, \quad \forall_x f'_7(x) \geq -1, \\ f_8(-2) &= 0, \quad f_8(0) = 10, \quad f_8(3) = 4, \\ f_9(-1) &= 0, \quad f_9(1) = 100, \quad f'_9(3) = 40, \\ f_{10}(1) &= -5, \quad f_{10}(11) = 5, \quad \forall_x 0 < f'_{10}(x) < 2, \\ f_{11}(0) &= 0, \quad f_{11}(100) = 0, \quad \forall_x -1 < f'_{11}(x) < 2, \\ f_{12}(-100) &= -100, \quad f_{12}(100) = 100, \quad \forall_x -100 < f'_{12}(x) < 100. \end{aligned}$$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\forall_x f'_i(x) \neq 0$$

B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = -1$$

C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(0) \neq 1$$

D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(99) > 0$$

E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = 5$$

F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = 44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = \frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1) \neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f_i(c) = 13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_{c \neq d} f_i(c) = f_i(d) = 7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_{c,d} f_i(c) = f'_i(d)$$

500.30. Udowodnić nierówności $\frac{1}{1301} < \arctg 51 - \arctg 49 < \frac{1}{1201}$.

500.31. Udowodnić nierówności $\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}$.

500.32. Dana jest funkcja $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

Obliczyć granice

500.33. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

500.34. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

500.35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

500.36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x \sin x - x^2}$

500.37. $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$

500.38. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

500.39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

500.40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$

500.41. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

500.42. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

500.43. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2}$

500.44. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{x - e}$

500.45. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$

500.46. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}$

500.47. Niech $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \neq 2 \\ x^2 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

Obliczyć $f'(2)$.

500.48. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

500.49. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbb{Z}$, dla których istnieje.

500.50. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sin(\pi x)} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \\ x^3 - x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbb{Z}$, dla których istnieje.

500.51. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

500.52. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Obliczyć pochodną rzędu 3 funkcji zmiennej x danej wzorem:

500.53. $(x+1)^6$	500.54. $x^6 - 4x^3 + 4$	500.55. $\frac{1}{1-x}$	500.56. $x^3 \ln x$
500.57. e^{2x-1}	500.58. $\cos 2x$	500.59. $(x^2+1)^3$	
500.60. e^{x^2}	500.61. $\ln(x^2)$	500.62. $(x-7)^{50}$	

500.63. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb rzeczywistych (a, b) , że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = e^{ax} \cdot \cos(bx)$$

jest równa swojej pochodnej trzeciego rzędu.