

500.30. Udowodnić nierówności $\frac{1}{1301} < \arctg 51 - \arctg 49 < \frac{1}{1201}$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x) = \arctg x$ na przedziale $[49, 51]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (49, 51)$, że

$$\arctg 51 - \arctg 49 = (51 - 49) \cdot f'(c) = 2 \cdot f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $49 < c < 51$ otrzymujemy

$$\frac{1}{1301} = \frac{2}{2602} = \frac{2}{51^2 + 1} < \arctg 51 - \arctg 49 = \frac{2}{c^2 + 1} < \frac{2}{49^2 + 1} = \frac{2}{2402} = \frac{1}{1201},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

500.31. Udowodnić nierówności $\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x) = \ln x$ na przedziale $[8, 9]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 9)$, że

$$\ln 9 - \ln 8 = f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x},$$

z nierówności $8 < c < 9$ otrzymujemy

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 = f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{8},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

500.32. Dana jest funkcja $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Należy udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{y^2 + 9} \right| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{y^2 + 9} \right| &= \left| \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{y^2 + 9} \right| \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9}} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9}} = |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9}}. \end{aligned}$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykazemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} \leq \frac{4}{5},$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y| \leq \frac{4}{5} \cdot (\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}).$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta, wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ oraz uwzględniając nierówności $x^2 \leq 16$ i $y^2 \leq 16$:

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{25} + \frac{16x^2}{25}} + \sqrt{\frac{9y^2}{25} + \frac{16y^2}{25}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{25} + \frac{16x^2}{25}} + \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{25} + \frac{16y^2}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25} \cdot (x^2+9)} + \sqrt{\frac{16}{25} \cdot (y^2+9)} = \\ &= \frac{4}{5} \cdot (\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}). \end{aligned}$$

Sposób II:

Dla $x=y$ dowiedziona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c leży między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby $x \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{5}.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+9}} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}},$$

co jest oczywiście mniejsze od $4/5$ dla $x=0$, natomiast dla $x \neq 0$ możemy kontynuować oszacowania:

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{25/16}} = \frac{4}{5}.$$

500.52. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - 1 + \ln(1-h)}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 + \ln(1-h) - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{1-h} - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{(1-h)^2} - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{2}{(1-h)^3} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-1-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = -1/6$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{6}{(1-h)^3}}{24} = -\frac{5}{24}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = -1/6$ i wówczas $f'(0) = -5/24$.