

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 29,31.01.2018 (grupy 2–5).

Wyznaczyć punkty przegięcia i przedziały wypukłości/wkłęśłości funkcji zmiennej x danej wzorem:

500.81. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

500.82. $x^8 - x^2 + 7x - 15$

500.83. e^{-x^2}

500.84. $\sin^4 x$

500.85. $\sqrt{x} - \ln x$

500.86. $x^4 + \sqrt[4]{x}$

Bez korzystania z kalkulatora wstawić w miejsce kropek znak nierówności " $<$ " albo " $>$ " :

500.87. $2 \cdot \arctg 34 \dots\dots\dots \arctg 33 + \arctg 35$

500.88. $\sqrt[4]{32} \dots\dots\dots \sqrt[4]{1,9} + \sqrt[4]{2,1}$

500.89. $2 \cdot \sin 47^\circ \dots\dots\dots \sin 46^\circ + \sin 48^\circ$

500.90. $512 \dots\dots\dots 3,99^{3,99} + 4,01^{4,01}$

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0 .

500.91. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 0$

500.92. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \quad x_0 = 0$

500.93. $f(x) = \sin x - \ln(1+x), \quad x_0 = 0$

500.94. $f(x) = 2\cos x + \ln(1+x^2), \quad x_0 = 0$

500.95. $f(x) = \arctg x - x, \quad x_0 = 0$

500.96. $f(x) = \arctg x - \frac{x}{2}, \quad x_0 = 1$

500.97. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ " :

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

500.98. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ " :

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f'(a) = g'(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

500.99. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ " :

LEMAT: Niech $a < b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f(b) = g(b)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) > g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots\dots g(x)$.

Wstawić znak " $<$ " albo " $>$ " i udowodnić powstałą nierówność:

- 500.100.** $\ln(x+1) \dots x$ dla $x > 0$ **500.101.** $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$
- 500.102.** $\ln(x+1) \dots x$ dla $-1 < x < 0$
- 500.103.** $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2}$ dla $-1 < x < 0$
- 500.104.** $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > 0$
- 500.105.** $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $-1 < x < 0$
- 500.106.** $\ln(x+1) \dots \frac{x}{2}$ dla $0 < x < 2$
- 500.107.** $\arctg x \dots x$ dla $x > 0$ **500.108.** $\arctg x \dots \frac{\pi x}{4}$ dla $0 < x < 1$
- 500.109.** $\sin x \dots x$ dla $x > 0$
- 500.110.** $\cos x \dots 1 - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$
- 500.111.** $\sin x \dots x - \frac{x^3}{6}$ dla $x > 0$
- 500.112.** $\cos x \dots 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ dla $x > 0$
- 500.113.** $\sin x \dots \frac{2x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **500.114.** $\sin x \dots \frac{3x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{6}$

500.115. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f = [a, b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

- (i) $f'(a^+) > 0$
- (ii) $f'(a^+) < 0$
- (iii) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) > 0$
- (iv) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) < 0$
- (v) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) > 0$
- (vi) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) < 0$

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

- (vii) $f'(b^-) > 0$
- (viii) $f'(b^-) < 0$
- (ix) $f'(b^-) = 0$, $f''(b^-) > 0$
- (x) $f'(b^-) = 0$, $f''(b^-) < 0$
- (xi) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0$, $f'''(b^-) > 0$
- (xii) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0$, $f'''(b^-) < 0$